# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT1001 — Matematikk 1 |
| Eksamensdag: | Torsdag 10. desember 2015 |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 13.00 |
| Oppgavesettet er på 4 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen |
| Tillatte hjelpemidler: | Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle delspørsmål teller like mye. Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

### Oppgave 1

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + \beta y' + 2y = 0$$

der $\beta$ er en positiv reell konstant,. For ulike verdier av $\beta$ vil løsningene av likningen ha ulike karakter. Det vil være et markant skifte for $\beta = 2\sqrt{2}$.

a) Gi en kort beskrivelse av forskjellen på løsningene til likningene når $\beta > 2\sqrt{2}$, og når $\beta < 2\sqrt{2}$.

b) Vi setter nå $\beta = 2\sqrt{2}$. Finn en løsning av differensiallikningen i dette tilfellet dersom vi vet at $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.

### Oppgave 2

Kleibers lov stammer fra Max Kleibers arbeider i biologi fra tidlig på 1930-tallet. Loven sier at pattedyrs hvilestoffskifte, som vi kaller $y$, forholder seg til dyrets kroppsvekt, kalt $x$, i henhold til likningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y}{x}$$

Hvilestoffskiftet er den energimengde kroppen trenger for å være i energibalanse når den holder seg fullstendig i ro. Vi tar utgangspunkt i at en hund som veier 16 kg har et hvilestoffskifte på 560 kcal pr. dag, dvs. $y(16) = 560$. Finn et generelt uttrykk for hvilestoffskiftet $y = y(x)$ som en funksjon av kroppsvekten, og slik at $y(16) = 560$.

*(Fortsettes på side 2.)*

## Oppgave 3

a) Skriv uttrykket $\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

b) En funksjon $y = y(t)$ er bestemt av en 2. ordens differensiallikning

$$4y'' + y = 0$$

Vi vet at $y(\pi) = 1$ og $y'(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finn $y$ som en funksjon i $t$.

## Oppgave 4

a) Finn en antiderivert til funksjonen $f(x) = x \cdot e^{ax^2}$, der $a$ er et reellt tall, ulikt 0.

En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$y' + xy = -x,$$

hvor $y(1) = 0$.

b) Løs likningen og finn et uttrykk for $y = y(x)$.

c) Når $x \to \infty$ vil $y$ stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

SLUTT

*(Fortsettes på side 3.)*

## Noen aktuelle formler

### Derivasjonsregler

**Spesielle:** $(x^n)' = nx^{n-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

**Generelle:** $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

### Spesielle funksjoner

**Eksponensialfunksj.**: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

**Logaritmer**: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$

$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a \ln x$

**Trigonometriske**: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

**Eksakte verdier**:

| $v$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin v$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| $\cos v$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $\tan v$ | 0 | $\sqrt{3}/3$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $-$ |

### Integrasjonsregler

**Spesielle:** $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,\ x > 0$

$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ spesielt $\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

**Generelle:** $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

**Bestemte integraler:** $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

### Differens- og differensialligninger

**Første ordens differensialligning**, $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y(x) = e^{-\int f\,dx} \int e^{\int f\,dx} g(x)\,dx$$

*(Fortsettes på side 4.)*

**Andre ordens differensialligning**, $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

**Første ordens homogen differenslikning**;

$$x_n - kx_{n-1} = 0 \;:\quad x_n = Ck^n$$

**Andre ordens homogen differenslikning**;

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad \text{karakteristisk polynom: } r^2 + br + c,$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n\cos(n\theta) + D\rho^n\sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

## Matriseregning og komplekse tall

**Komplekse tall**:

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Realdel}: \; Re(z) = a, \quad \text{Imaginærdel}: \; Im(z) = b$$

$$\text{Kompleks konjugert}: \overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$$

$$\text{De Moivres formel}: \; (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

**Matriseprodukt**:

$$(x_{ij}) \cdot (y_{ij}) = (z_{ij}), \quad , z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}$$

**Determinanter**: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}, \quad \det(A^T) = \det(A)$$

**Egenvektor/egenverdi**:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \quad \text{karakteristisk polynom: } \det(\lambda I_n - A)$$

**Invers matrise**: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$