UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1001 — Matematikk I
Eksamensdag:	Fredag 4. juni 2010
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 11 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst. Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

LØSNINGSFORSLAG

På denne eksamenen kan du oppnå totalt 67 poeng. Vektingen av de ulike oppgavene står angitt ved hver deloppgave. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at samlet poengsum blir maksimalt 100 poeng. Denne summen legges til grunn for karakteren du får på kurset.

Oppgave 1

a) [8 poeng] Finn alle de antideriverte til funksjonen $f(x) = 3xe^{x^2}$.

Løsning: Vi er ute etter

$$\int f(x)dx = \int 3xe^{x^2}dx.$$

Vi substituerer

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ du &= 2xdx \\ \frac{1}{2}du &= xdx. \end{aligned}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= 3\int xe^{x^2}dx \\ &= 3\int \frac{1}{2}e^u du \\ &= \frac{3}{2}e^u + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{2}e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}}} \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

b) [10 poeng] En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$y' + xy = xe^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Finn den spesielle løsningen til denne differensiallikningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$.

Løsning: Vi finner integrerende faktor:

$$f(x) = x, \quad F(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad e^{F(x)} = e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Ganger likningen med integrerende faktor og vi får:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}x^2}y' + xe^{\frac{1}{2}x^2}y &= xe^{\frac{1}{2}x^2}e^{\frac{1}{2}x^2} \\ (e^{\frac{1}{2}x^2}y)' &= xe^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2} \\ (e^{\frac{1}{2}x^2}y)' &= xe^{x^2}. \end{aligned}$$

Vi integrerer med hensyn på x og finner et uttrykk for $y(x)$. Bruker $\frac{1}{3}$ ganger svaret fra a).

$$\begin{aligned} \int (e^{\frac{1}{2}x^2}y)'dx &= \int xe^{x^2}dx \\ (e^{\frac{1}{2}x^2}y) &= \frac{1}{2}e^{x^2} + C, \ C \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \frac{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}{e^{\frac{1}{2}x^2}}, \ C \in \mathbb{R} \\ y(x) &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x^2} + Ce^{-\frac{1}{2}x^2}, \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi bruker initialbetingelsen:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}0^2} + Ce^{-\frac{1}{2}0^2} \\ 1 &= \frac{1}{2} + C \\ C &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vi får løsningen

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)}}.$$

Oppgave 2 En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + 4y = 0.$$

a) [8 poeng] Finn den generelle løsningen til denne differensiallikningen.

(Fortsettes på side 3.)

Løsning: Finner karakteristisk likning

$$r^2 + 4 = 0,$$

som har røtter

$$r_1 = 2i, \quad r_2 = -2i.$$

Dette gir oss, ved løsningsformelen for komplekse røtter,

$$y(x) = e^0 \left(C\cos(2x) + D\sin(2x)\right), \qquad C, D \in \mathbb{R}$$
$$\underline{\underline{y(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x), \qquad C, D \in \mathbb{R}.}}$$

b) [6 poeng] Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller $y(0) = 2$ og $y'(0) = -4\sqrt{3}$.

Løsning: Vi bruker første initialbetingelse,

$$\begin{aligned} y(0) = 2 &= C\cos(0) + D\sin(0) \\ 2 &= C. \end{aligned}$$

Vi har da

$$y(x) = 2\cos(2x) + D\sin(2x), \qquad D \in \mathbb{R}.$$

Deriverer vi, får vi

$$y'(x) = -4\sin(2x) + 2D\cos(2x).$$

Vi bruker andre initialbetingelse,

$$\begin{aligned} y'(0) = -4\sqrt{3} &= -4\sin(0) + 2D\cos(0) \\ -4\sqrt{3} &= 2D \\ D &= -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dette gir oss den spesielle løsningen

$$\underline{\underline{y(x) = 2\cos(2x) - 2\sqrt{3}\sin(2x)}}.$$

c) [4 poeng] Svaret i b) er en harmonisk svingning. Vis ved utregning at svingningen kan skrives som

$$y(x) = 4\cos(2x - \frac{5\pi}{3}).$$

Løsning: Vi bruker overgangsformelen,

$$C\cos(bx) + D\sin(bx) = A\cos(bx - \phi), \qquad \phi \in [0, 2\pi).$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{16} \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \cos\phi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\phi = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \qquad \phi = \frac{5\pi}{3}.$$

Vi får

$$\underline{\underline{y(x) = 4\cos(2x - \frac{5\pi}{3}).}}$$

(Fortsettes på side 4.)

OPPGAVE 3 For en funksjon $z(t)$ har vi differensiallikningen

$$z' = -kz,$$

der k er en positiv reell konstant.

a) [8 poeng] Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for $z(t)$.

Løsning: Denne differensiallikningen kan regnes som en separabel- eller 1.ordens lineær difflikning. Disse løsningsmetodene er ekvivalente.

Separabel: $z = 0$ er en triviell løsning til difflikningen. Vi kan derfor anta $z \neq 0$ og separere,

$$\frac{1}{z}z' = -k.$$

Integrerer,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{z}z'dt &= \int -kdt \\ \int \frac{1}{z}dz &= \int -kdt \\ \ln|z| &= -kt + C, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vi finner z,

$$e^{\ln|z|} = e^{-kt+C}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

$$\underline{\underline{z(t) = De^{-kt}, \qquad D \in \mathbb{R}.}}$$

1.ordens lineær: På standard form har vi

$$z' + kz = 0.$$

Integrerende faktor,

$$f(t) = k, \quad F(t) = kt, \quad e^{F(t)} = e^{kt}.$$

Vi får

$$\begin{aligned} (e^{kt}z)' &= 0 \\ e^{kt}z &= D, \qquad D \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{z(t) = De^{-kt}, \qquad D \in \mathbb{R}.}}$$

b) [6 poeng] La N være et positivt reelt tall. Vis at dersom vi har $z(0) = N$ og $z(5730) = \frac{N}{2}$ vil løsningen i a) være gitt ved

$$z(t) = Ne^{-\frac{t\ln 2}{5730}}.$$

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Bruker betingelsene som er oppgitt i oppgaven og finner D og k,

$$\begin{aligned} z(0) = N &= De^0 \\ D &= N. \end{aligned}$$

$$z(t) = Ne^{-kt}$$

$$\begin{aligned} z(5730) = \frac{N}{2} &= Ne^{-5730k} \\ \frac{1}{2} &= e^{-5730k} \\ \ln\left(\frac{1}{2}\right) &= -5730k \ln e \\ -\ln 2 &= -5730k \\ k &= \frac{\ln 2}{5730}. \end{aligned}$$

Dermed får vi løsningen

$$\underline{\underline{z(t) = Ne^{-\frac{t\ln 2}{5730}}.}}$$

c) [2 poeng] Uttrykket i b) brukes for å beregne alder på organisk materiale ved en metode kalt Karbon-14. Man sammenlikner innholdet av isotopen Karbon-14 i nålevende organisk materiale og i det materialet man ønsker å beregne alderen til. På et arkeologisk utgravningssted i Hellas er det funnet en gammel tretavle med matematiske inskripsjoner. Det tas en prøve av tretavlen, og målinger viser at verdien av z er $\frac{4}{5}N$. Dette betyr at ved et tidspunkt t_0 er $z(t_0) = \frac{4}{5}N$. Den berømte matematikeren Pythagoras levde i perioden 580-500 f.Kr. Er det mulig at inskripsjonene kan være laget av ham? Begrunn svaret ditt ved bruk av modellen i b).

Løsning: Bruker opplysningene i teksten,

$$\begin{aligned} z(t_0) = \frac{4}{5}N &= Ne^{-\frac{t_0 \ln 2}{5730}} \\ \ln\left(\frac{4}{5}\right) &= -\frac{t_0 \ln 2}{5730} \\ t_0 &= \frac{-5730 \ln\left(\frac{4}{5}\right)}{\ln 2} \approx 1845. \end{aligned}$$

<u>Treet som tretavlen er laget av ble hugget for ca 1845 år siden, altså ca år 165 e.Kr. Pythagoras levde ikke da, og det er derfor umulig at Pythagoras kan ha laget inskripsjonene.</u>

(Fortsettes på side 6.)

OPPGAVE 4 I hele denne oppgaven lar vi P være en positiv reell konstant. Vi antar også at $P \neq 1$.

a) [5 poeng] Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen M,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1-P \\ 0 & P \end{bmatrix}.$$

Løsning: Finner først egenverdiene,

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-P \\ 0 & P-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(P-\lambda). \end{aligned}$$

M har altså egenverdier $\underline{\underline{\lambda_1 = 1 \text{ og } \lambda_2 = P}}$.

$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1-P & 0 \\ 0 & P-1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter parameter for fri variabel, $p_1 = s,\ s \in \mathbb{R}$. Deretter finner vi fra første rad at $q_1 = 0$. Setter vi parameteren $s = 1$, får vi egenvektor

$$\underline{\underline{\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1-P & 1-P & 0 \\ 0 & P-P & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter parameter for fri variabel, $q_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$. Deretter finner vi fra første rad at $p_2 + q_2 = 0$, det vil si $p_2 = -q_2 = -s$. Setter vi parameteren $s = 1$, får vi egenvektor

$$\underline{\underline{\vec{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}}.$$

b) [7 poeng] Vi har

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-P \\ 0 & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Gitt

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

finn et uttrykk for

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 7.)

Løsning: Vi skriver først initialvektoren som en lineærkombinasjon av egenvektorer, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir lineært likningssystem med a, b som variabler, som kan skrives som utvidet matrise,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

som gir $a = 4$ og $b = 1$.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bruker vi nå relasjonen gitt i oppgaven, matriseregler og egenskaper for egenverdier og egenvektorer, får vi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} &= M^n \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= M^n \cdot \left(4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= 4 \cdot 1^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + P^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 - P^n \\ P^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - P^n \\ P^n \end{bmatrix}}}.$$

c) [3 poeng] Angi for hvilke verdier av P grenseverdien

$$\lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

eksisterer, og angi grenseverdien i disse tilfellene.

Løsning: Vi har fra oppgaven at $P > 0$ og $P \neq 1$. Observerer først at

$$\lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} 4 - P^n \\ P^n \end{bmatrix}$$

eksisterer dersom $P < 1$. Den eksisterer ikke dersom $P > 1$.

$\underline{\underline{\text{Grenseverdien eksisterer for } P < 1.}}$

Antar $P < 1$, og får

$$\underline{\underline{\lim_{n \to \infty} \begin{bmatrix} 4 - P^n \\ P^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}}}.$$

SLUTT

(Fortsettes på side 8.)