Løsningsforslag, eksamen i MAT 1001, høsten 2009

Oppgave 1

a) [8 poeng] Finn en antiderivert til funksjonen $f(x) = x^2 e^x$.

Løsning.

Vi bruker delvis integrasjon to ganger

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^x \\ u' = 2x & v = e^x \end{array}}$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array}}$$

$$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C')$$

$$\underline{\underline{= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C}}$$

hvor vi har satt $C = -2C'$.

b) [10 poeng] En første ordens differensiallikning er gitt ved $y' + y = x^2$. Finn den spesielle løsningen til denne differensiallikningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$.

Løsning.

Vi setter inn i formelen og bruker resultatet i a);

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 1 \, dx} \int x^2 \, e^{\int 1 \, dx} \, dx \\ &= e^{-x} \int x^2 \, e^x \, dx \\ &= e^{-x}(x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C) \\ &= x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x} \end{aligned}$$

Initialbetingelsen gir

$$1 = y(0) = 0 - 2 \cdot 0 + 2 + C = 2 + C$$

eller $C = -1$ og vi har den spesielle løsningen

$$\underline{\underline{y = x^2 - 2x + 2 - e^{-x}}}$$

Oppgave 2 I en kjemisk reaksjon vil ett molekyl av stoffet A reagere med ett molekyl av stoffet B og danne ett molekyl av stoffet C. Vi blander ut like store mengde (P) av A og B i et vannbad og følger med på reaksjonen. Vi lar $y(t)$ betegne mengden av stoff C som er dannet i vannbadet ved tiden t. Vi antar at y oppfyller differensiallikningen

$$y' = k(P-y)^2$$

der k er en positiv konstant.

a) [8 poeng] Løs differensiallikningen og finn et uttrykk for y som en funksjon av tiden t.

Løsning.

Dette er en separabel DL, så vi separerer variable og integrerer begge sider;

$$\frac{1}{P-y} = \frac{1}{u} = \int \frac{-du}{u^2} = \int \frac{dy}{(P-y)^2} = \int k\,dt = kt + C$$

$$\boxed{u = P - y \quad du = -dy}$$

dvs.

$$\frac{1}{P-y} = kt + C$$

eller

$$P - y = \frac{1}{kt+C}$$

som gir

$$\underline{\underline{y = P - \frac{1}{kt+C}}}$$

b) [6 poeng] Vis at dersom vi setter $y(0) = 0$ vil løsningen i a) være gitt ved

$$y(t) = \frac{P^2kt}{Pkt+1}$$

Løsning.

Setter inn $y(0) = 0$ og får

$$0 = y(0) = P - \frac{1}{k \cdot 0 + C} = P - \frac{1}{C}$$

dvs. $C = \frac{1}{P}$ som gir løsning

$$y = P - \frac{1}{kt + \frac{1}{P}} = P - \frac{P}{Pkt+1} = \frac{P^2kt}{Pkt+1}$$

c) [5 poeng] Når $t \to \infty$ vil løsningen y av differensiallikningen stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

Løsning.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{P^2kt}{Pkt+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{P^2k}{Pk+\frac{1}{t}} = \frac{P^2k}{Pk} = P$$

Dette kunne vi også utledet rett fra likningen, siden det at y stabiliserer seg er ekvivalent med at $y' = 0$. Det følger av likningen at $P - y = 0$, eller $y = P$.

Oppgave 3 En andre ordens differensiallikning er gitt vd

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

a) [8 poeng] Finn den generelle løsningen til denne differensiallikningen.

Løsning.

Vi finner røttene til det karakteristiske polynomet, $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$, gitt ved

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

Innsetting i formelen for løsning av slike DL gir,

$$\underline{\underline{y = e^{-x}(C \cos(2x) + D \sin(2x))}}$$

b) [8 poeng] Vis ved utregning at den spesielle løsningen av differensiallikningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $y(\pi) = 0$ og $y'(\pi) = e^{-\pi}$ er gitt ved

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$$

Løsning.

Vi beregner først den deriverte til y;

$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}(C \cos(2x) + D \sin(2x)) + e^{-x}(-2C \sin(2x) + 2D \cos(2x)) \\ &= e^{-x}((-C + 2D) \cos(2x) + (-2c - D) \sin(2x)) \end{aligned}$$

Setter så inn for initialbetingelsene;

$$0 = y(\pi) = e^{-\pi}(C \cos(2\pi) + D \sin(2\pi)) = Ce^{-\pi}$$

$$\begin{aligned} e^{-\pi} &= y'(\pi) = e^{-\pi}((-C + 2D) \cos(2\pi) + (-2c - D) \sin(2\pi)) \\ &= e^{-\pi}(-C + 2D) \end{aligned}$$

som sammen gir $C = 0$ og $D = \frac{1}{2}$ og den spesielle løsningen blir

$$y = e^{-x} \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) = \frac{1}{2} e^{-x} \sin(2x)$$

Oppgave 4 En andre ordens inhomogen differenslikning er gitt ved

$$x_{n+2} - x_n = 4n - 2$$

a) [8 poeng] Finn den generelle løsningen av differenslikningen.

Løsning.

Vi løser først den tilsvarende homogene likningen ved å finne røttene i det karakteristiske polynomet. Vi har $\lambda^2 - 1 = 0$ som gir $\lambda = \pm 1$ og den generelle løsningen av den homogene blir

$$x_n^h = C \cdot 1^n + D(-1)^n = C + D(-1)^n$$

Vi finnner så en spesiell løsning av den inhomogene likningen. Siden $\lambda = 1$ er en rot i det karakteristiske polynomet må vi prøve med et polynom av grad en høyere enn høyresiden i likningen, dvs. vi prøver med $x_n^s = An^2 + Bn + C$. Innsetting gir;

$$\begin{aligned} x_{n+2}^s - x_n^s &= A(n+2)^2 + B(n+2) + C - An^2 - Bn - C \\ &= An^2 + 4An + 4A + Bn + 2B + C - An^2 - Bn - C \\ &= 4An + 2B + 4A = 4n - 2 \end{aligned}$$

som gir $4A = 4$ og $2B + 4A = -2$, eller $A = 1$ og $B = -3$. Dermed har vi den spesielle løsningen gitt ved $x_n^s = n^2 - 3n$, som satt sammen med den generelle løsningen av den homogene likningen gir oss den generelle løsningen av den inhomogene likningen

$$\underline{\underline{x_n = C + D(-1)^n + n^2 - 3n}}$$

b) [6 poeng] Gitt initialbetingelser $x_0 = 0$ og $x_1 = 0$, finn den spesielle løsningen til differens-likningen.

Løsning.

Vi setter inn for initialverdiene og får

$$\begin{aligned} 0 = x_0 = C + D(-1)^0 + 0^2 - 3 \cdot 0 = C + D \\ 0 = x_1 = C + D(-1)^1 + 1^2 - 3 \cdot 1 = C - D - 2 \end{aligned}$$

som gir $C = -D = 1$ og vi har den spesielle løsningen

$$\underline{\underline{x_n = 1 - (-1)^n + n^2 - 3n}}$$

SLUTT