MAT 1001

Vår 2010

Oblig 1

Innleveringsfrist: Fredag 19.februar kl. 1430.

Oppgaven leveres stiftet med forsideark på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Oppgaven vil bli vurdert i henhold til gjeldende reglement:

`http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml`.

Videre vil det ved rettingen gis 0-5 poeng på hver deloppgave. Oppgaven vil bli godkjent når alle deloppgaver er forsøkt løst **og** det er oppnådd mer enn 20 poeng.

a) Vis at

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b) Vi har gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + cz &= 0 \\ x + 4y + c^2 z &= -2, \end{aligned}$$

der $c \in \mathbb{R}$. For hvilke verdier av c har likningssystemet en, ingen og uendelig mange løsninger? Finn løsningsmengden når vi har uendelig mange løsninger, og beskriv denne løsningen geometrisk.

c) La c være slik at likningsystemet i oppgave b) har nøyaktig én løsning. Bruk Cramers regel til å beregne løsningen til likningsystemet. *(Ekstraoppgave: Er det noe overraskende med løsningen? Vurder gjerne løsningen opp mot svaret i oppgave b).)*

d) Vi har gitt matrisen M,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen M har en egenverdi $\lambda_1 = 1$. Finn de andre egenverdiene, og finn deretter de tilhørende egenvektorene.

e) Skriv vektoren

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av egenvektorene til matrisen M.

f) La matrisen M fra oppgave d) være overgangsmatrisen i et problem fra populasjonsdynamikken, slik at

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = M \cdot \boldsymbol{u}_n.$$

Med $\boldsymbol{u}_0$ som i oppgave e), finn et uttrykk for $\boldsymbol{u}_n$.

g) En ufarlig, men svært smittsom, sykdom brer seg i en skoleklasse på 30 elever. Den dagen sykdomsutbruddet oppdages er 1 person syk og 29 friske. Sykdommen smitter raskt: 50% av elevene som var friske en dag er syke den neste dagen. Heldigvis er sykdommen ufarlig, og elevene blir raskt friske: Alle som var syke en dag er friske den neste dagen. Elever som har vært syke blir ikke immune mot sykdommen.

Lag en matematisk modell som kan si noe om hvor mange elever som er friske og syke i klassen ved en gitt dag. Kan du si noe om hvor mange elever som vil være friske og hvor mange som vil være syke to dager etter sykdomsutbruddet?

(Hint: Bruk teori fra populasjonsdynamikken og gjør det samme som du gjorde i oppgavene d)–f).)

h) Helsesøster på skolen med klassen fra oppgave g) vil unngå at denne situasjonen oppstår igjen. Hun har en ufarlig vaksine som kan gis til de andre klassene. Vaksinen vil kunne dempe spredningen av sykdommen, men ikke hindre den helt. Fra produsenten av vaksinen får helsesøsteren oppgitt at i en klasse der alle er vaksinerte vil 20% av elevene som var friske en dag være syke den neste dagen. Fremdels vil alle som var syke en dag være friske den neste dagen.

Lag en matematisk modell som kan si noe om hvordan sykdommen vil bre seg i en klasse som er vaksinert. Vi antar, som i g), at det er 30 elever i den aktuelle klassen og at sykdomsutbruddet begynner den dagen 1 elev er syk. Kan du si noe om prosentandel syke langt fram i tid? (Hint: Ta grensen $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n$, og beregn deretter prosentandelen.)