MAT 1001

Vår 2010

Oblig 1

Innleveringsfrist: Fredag 19.februar kl. 1430

Oppgaven leveres stiftet med forsideark på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Oppgaven vil bli vurdert i henhold til gjeldende reglement:

`http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml`.

Videre vil det ved rettingen gis 0-5 poeng på hver deloppgave. Oppgaven vil bli godkjent når alle deloppgaver er forsøkt løst **og** det er oppnådd mer enn 20 poeng.

a) Vis at

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

Løsning: En måte å vise dette på, er å regne ut hver side for seg:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} \\ &= bc^2 - b^2c - (ac^2 - a^2c) + ab^2 - a^2b \\ &= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b-a)(c-a)(c-b) &= (b-a)(c^2 - cb - ac + ab) \\ &= bc^2 - cb^2 - abc + ab^2 - ac^2 + abc + a^2c - a^2b \\ &= bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c + ab^2 - a^2b.\end{aligned}$$

b) Vi har gitt likningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + 2y + cz &= 0 \\ x + 4y + c^2z &= -2, \end{aligned}$$

der $c \in \mathbb{R}$. For hvilke verdier av c har likningssystemet en, ingen og uendelig mange løsninger? Finn løsningsmengden når vi har uendelig mange løsninger, og beskriv denne løsningen geometrisk.

Løsning: Vi finner først koeffisientmatrisen til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 4 & c^2 \end{bmatrix}$$

Deretter regner vi ut determinanten til koeffisientmatrisen til likningssystemet. Med $a = 1$ og $b = 2$, kan vi bruke oppgave a):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 4 & c^2 \end{vmatrix} = (2-1)(c-1)(c-2)$$

Vi ser at determinanten er lik 0 hvis $c = 1$ eller $c = 2$.

Systemet har nøyaktig én løsning når $c \notin \{1, 2\}$.

$c = 1$) Vi har den utvidede matrisen til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen kan vi bruke Gauss-Jordan eliminasjon på til vi har følgende matrise på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi setter inn parameteren $z = s, \quad s \in \mathbb{R}$, og får følgende løsninger fra de respektive radene:

$$z = s, \qquad x = 2 - 3s, \qquad y = -1 + 2s.$$

På vektorform er løsningen

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Vi har altså uendelig mange løsninger. Løsningsmengden er en linje fordi vi har én parameter.

$c = 2$) Vi har den utvidede matrisen til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen kan vi bruke Gauss-Jordan eliminasjon på til vi har følgende matrise på redusert trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi setter inn parameteren $z = s, \quad s \in \mathbb{R}$, og får følgende løsninger fra de respektive radene:

$$z = s, \qquad x = 2, \qquad y = -1 - s.$$

På vektorform er løsningen

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} + s \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Vi har altså uendelig mange løsninger også i dette tilfellet. Løsningsmengden er en linje fordi vi har én parameter.

Observer at likningssystemet vårt har minst en løsning for alle verdier av c, det er med andre ord konsistent.

c) La c være slik at likningsystemet i oppgave b) har nøyaktig én løsning. Bruk Cramers regel til å beregne løsningen til likningsystemet. *(Ekstraoppgave: Er det noe overraskende med løsningen? Vurder gjerne løsningen opp mot svaret i oppgave b).)*

Løsning:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & c \\ -2 & 4 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 4 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{2(c-1)(c-2)}{(c-1)(c-2)} = 2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c \\ 1 & -2 & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 4 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{-(c-1)(c-2)}{(c-1)(c-2)} = -1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & c \\ 1 & 4 & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{0}{(c-1)(c-2)} = 0.$$

Løsningen vår er

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(Det overraskende i denne løsningen er at løsningen ikke er avhengig av verdien av c. Hvis du vil vite hvorfor det er slik, kan du ta kurset MAT1110 eller spørre en gruppelærer!)

d) Vi har gitt matrisen M,

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen M har en egenverdi $\lambda_1 = 1$. Finn de andre egenverdiene, og finn deretter de tilhørende egenvektorene.

Løsning:

$$\begin{aligned} det(M - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

Fra dette ser vi at vi har egenverdiene

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

De tilhørende egenvektorene finner vi slik:

- $\boldsymbol{v}_1$:

$$M = \begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduserer vi, kommer vi til:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi setter parameter for den frie variabelen i kolonne 2, $y = s$. Radene gir deretter opphav til $x = 0$ og $z = 0$. Velger vi $s = 1$, får vi egenvektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

– $\boldsymbol{v}_2$:

$$M = \begin{bmatrix} 2-(-2) & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-(-2) & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-(-2) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduserer vi, kommer vi til:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi setter parameter for den frie variabelen i kolonne 3, $z = s$. Radene gir deretter opphav til $x = -\frac{1}{2}s$ og $y = 0$. Velger vi $s = 2$ for å unngå brøk, får vi egenvektor

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

– $\boldsymbol{v}_3$:

$$M = \begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1-3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduserer vi, kommer vi til:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi setter parameter for den frie variabelen i kolonne 3, $z = s$. Radene gir deretter opphav til $x = 2s$ og $y = 0$. Velger vi $s = 1$, får vi egenvektor

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

e) Skriv vektoren

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av egenvektorer.

Løsning: Vi innfører ukjente a, b og c. Da er matriselikningen

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

det samme som den utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette systemet kan vi vha G-J-E redusere til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Vi leser av at $a = 1$, $b = -\frac{2}{5}$ og $c = \frac{4}{5}$.
Vi har altså at $\boldsymbol{u}_0$ er følgende lineærkombinasjon av egenvektorer:

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

f) La matrisen M fra oppgave d) være overgangsmatrisen i et problem fra populasjonsdynamikken, slik at

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = M \cdot \boldsymbol{u}_n.$$

Med $\boldsymbol{u}_0$ som i oppgave e), finn et uttrykk for $\boldsymbol{u}_n$.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_n &= M^n \cdot \boldsymbol{u}_0 \\ &= M^n \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= M^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \cdot M^n \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot M^n \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Siden vi nå har med egenvektorer å gjøre, kan vi bruke identiteten

$$M^n \cdot \boldsymbol{v}_i = \lambda_i^n \cdot \boldsymbol{v}_i$$

for å finne et uttrykk for $\boldsymbol{u}_n$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_n &= 1^n \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \cdot (-2)^n \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot 3^n \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5} \cdot (-2)^n \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot 3^n \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

g) En ufarlig, men svært smittsom, sykdom brer seg i en skoleklasse på 30 elever. Den dagen sykdomsutbruddet oppdages er 1 person syk og 29 friske. Sykdommen smitter raskt: 50% av elevene som var friske en dag er syke den neste dagen. Heldigvis er sykdommen ufarlig, og elevene blir raskt friske: Alle som var syke en dag er friske den neste dagen. Elever som har vært syke blir ikke immune mot sykdommen.

Lag en matematisk modell som kan si noe om hvor mange elever som er friske og syke i klassen ved en gitt dag. Kan du si noe om hvor mange elever som vil være friske og hvor mange som vil være syke to dager etter sykdomsutbruddet?

(Hint: Bruk teori fra populasjonsdynamikken og gjør det samme som du gjorde i oppgavene d)–f).)

Løsning: Merk at dette neppe er noen realistisk modell! Man må ta flere hensyn når man lager en slik modell, og sannsynligvis er ikke modellen gyldig i lang tid. Tenk litt over dette!

Kall antall friske ved tid n for x_n og antall syke ved tid n for y_n. La

$$\boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vi setter så opp teksten som en tegning med bobler og finner følgende matriselikning,

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{u}_n.$$

Deretter regner vi ut egenverdier og egenvektorer til matrisen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0.5-\lambda & 1 \\ 0.5 & -\lambda \end{bmatrix} &= (0.5-\lambda)(-\lambda) - 0.5 \\ &= \lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5. \end{aligned}$$

Det karakteristiske polynomet gir oss egenverdier

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -0.5.$$

$\boldsymbol{v}_1$: Vi ser på den utvidede matrisen til likningssystemet $M - \lambda_1 \cdot I = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0.5-1 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vi setter parameter for fri variabel $y = s$ og finner fra første rad $x = 2s$. Velger vi $s = 1$, har vi egenvektor

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{v}_2$: Vi ser på den utvidede matrisen til likningssystemet $M - \lambda_2 \cdot I = \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0.5-(-0.5) & 1 & 0 \\ 0.5 & -(-0.5) & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Vi setter parameter for fri variabel $y = s$ og finner fra første rad $x = -s$. Velger vi $s = 1$, har vi egenvektor

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Så gjenkjenner vil initialvektor fra teksten,

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 29 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Deretter skriver vi $\boldsymbol{u}_0$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer og bruker identiteten $M^n \cdot \boldsymbol{v}_i = \lambda_i^n \cdot \boldsymbol{v}_i$.:

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 29 \\ 1 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Likningssystemet gir $a = 10$, $b = -9$, og vi har dermed følgende uttrykk for sykdomsutbruddet ved dag n:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_n &= M^n \cdot \boldsymbol{u}_0 \\
&= M^n \left(10 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 9 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= 10 \cdot 1^n \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 9 \cdot (-0.5)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 10 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 9 \cdot (-0.5)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Å se hvor mange som er friske og syke etter to dager er det samme som å se på $\boldsymbol{u}_2$.

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 20 + 9(-0.5)^2 \\ 10 - 9(-0.5)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.25 \\ 7.75 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 22 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(Vi ser at i det lange løp vil modellen vår anslå at antall friske elever stabilisere seg på 20 og antall syke elever vil være 10.)

h) Helsesøster på skolen med klassen fra oppgave g) vil unngå at denne situasjonen oppstår igjen. Hun har en ufarlig vaksine som kan gis til de andre klassene. Vaksinen vil kunne dempe spredningen av sykdommen, men ikke hindre den helt. Fra produsenten av vaksinen får helsesøsteren oppgitt at i en klasse der alle er vaksinerte vil 20% av elevene som var friske en dag være syke den neste dagen. Fremdels vil alle som var syke en dag være friske den neste dagen.

Lag en matematisk modell som kan si noe om hvordan sykdommen vil bre seg i en klasse som er vaksinert. Vi antar, som i g), at det er 30 elever i den aktuelle klassen og at sykdomsutbruddet begynner den dagen 1 elev er syk. Kan du si noe om prosentandel syke langt fram i tid? (Hint: Ta grensen $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n$, og beregn deretter prosentandelen.)

Løsning: Vi gjør nøyaktig det samme som over. Her får vi egenverdier

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -0.2.$$

Vi får egenvektorer

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uttrykket for $\boldsymbol{u}_0$ er

$$\boldsymbol{u}_0 = \begin{bmatrix} 29 \\ 1 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi finner $a = 5$ og $b = -4$, og får følgende uttrykk for $\boldsymbol{u}_n$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_n &= M^n \cdot \boldsymbol{u}_0 \\
&= M^n \left(5 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= 5 \cdot 1^n \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \cdot (-0.2)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= 5 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 4 \cdot (-0.2)^n \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ser vi på $\boldsymbol{u}_n$ når vi lar n gå mot ∞, får vi

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{u}_n = \begin{bmatrix} 25 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Prosentandel syke er derfor

$$\frac{5}{30} \cdot 100 \approx 17.$$

Tenk over forskjellen på modellene i g) og h).