# MAT 1001

Vår 2010

# Oblig 2

Innleveringsfrist: Fredag 23.april kl. 1430

Oppgaven leveres stiftet med forsideark på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Oppgaven vil bli vurdert i henhold til gjeldende reglement:

`http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml`.

Videre vil det ved rettingen gis 0-5 poeng på hver deloppgave. Oppgaven vil bli godkjent når alle deloppgaver er forsøkt løst **og** det er oppnådd mer enn 20 poeng.

a) En harmonisk svingning er gitt som en sum av to delsvingninger

$$H(x) = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}x) + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}x).$$

Skriv $H(x)$ på formen $A\cos(\omega(x - x_0))$.

Løsning: Vi har

$$A = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2,$$

$$\cos(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin(\phi) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

som gir $\phi = \frac{\pi}{4}$. Dermed har vi

$$H(x) = 2\cos(\frac{\pi}{4}(x - 1)).$$

b) For $c \in \mathbb{R}$ har vi differenslikningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + c \cdot x_n = 0.$$

Beskriv hva slags løsninger vi får for varierende verdier av $c$. En verdi for $c$ gir oss kun én rot i det karakteristiske polynomet. Skriv opp den generelle løsningen av likningen i dette tilfellet.

Løsning: Differenslikningen har karakteristisk likning $r^2 - 2r + c = 0$. Røttene er

$$r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-c}.$$

Det vil si at for $c < 1$ har vi to reelle røtter og løsningene

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n.$$

For $c > 1$ har vi to komplekse røtter og løsninger på formen

$$x_n = Er^n + \bar{E}\bar{r}^n.$$

Vi kan selvsagt også skrive løsningene på reell form; $r = \rho e^{i\theta}$,

$$x_n = \rho^n \left( C\cos(\theta n) + D\sin(\theta n) \right).$$

For $c = 1$ har vi bare en reell rot, og løsningen

$$x_n = C + Dn.$$

c) Vi har differenslikningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n^2 + n.$$

Finn løsningen av denne likningen som tilfredsstiller $x_0 = 0$ og $x_1 = 2$. (Hint: Bruk reell form.)

Løsning: Vi finner først løsningen av den assosierte homogene likningen $x_{n+2}^h - 2x_{n+1}^h + 2x_n^h = 0$. Dens karakteristiske likning har to komplekse røtter $r = 1 + i$ og $\bar{r} = 1 - i$. Roten $r$ kan vi skrive på eksponentialform ved å finne $\rho$ og $\theta$.

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

som gir $\theta = \frac{\pi}{4}$. Den generelle løsningen til den assosierte homogene likningen er

$$x_n^h = (\sqrt{2})^n \left( C\cos(\frac{\pi}{4}n) + D\sin(\frac{\pi}{4}n) \right), \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Den spesielle løsningen $x_n^s$ finner vi ved å gjette på løsningen

$$x_n^s = Rn^2 + Sn + T.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
R(n+2)^2+S(n+2)+T-2(R(n+1)^2+S(n+1)+T)+2(Rn^2+Sn+T)&=n^2+n\\
R(n^2+4n+4)+Sn+2S+T-2(R(n^2+2n+1)+Sn+S+T)+2Rn^2+2Sn+2T&=n^2+n\\
3Rn^2+4Rn+4R+3Sn+2S+3T-2Rn^2-4Rn-2R-2Sn-2S-2T&=n^2+n\\
Rn^2+2R+Sn+T&=n^2+n.
\end{aligned}$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned}
Rn^2&=n^2\\
Sn&=n\\
2R+T&=0.
\end{aligned}$$

Dette gir oss

$$R=1,\qquad S=1,\qquad T=-2.$$

Dermed har vi

$$x_n^s=n^2+n-2.$$

Den generelle løsningen til den inhomogene differenslikningen er dermed

$$2^{\frac{n}{2}}(C\cos(\frac{\pi}{4}n)+D\sin(\frac{\pi}{4}n))+n^2+n-2,\quad C,D\in\mathbb{R}.$$

Vi bruker initialbetingelsene for å finne den spesielle løsningen som oppfyller både initialbetingelsene og differenslikningen.

$$\begin{aligned}
x_0=0&=2^{\frac{0}{2}}\left(C\cos(\frac{\pi}{4}0)+D\sin(\frac{\pi}{4}0)\right)+0^2+0-2\\
0&=C-2\\
C&=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1=2&=2^{\frac{1}{2}}\left(2\cos(\frac{\pi}{4})+D\sin(\frac{\pi}{4})\right)+1^2+1-2\\
2&=\sqrt{2}\left(2\frac{\sqrt{2}}{2}+D\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
2&=2+D\\
D&=0
\end{aligned}$$

Den spesielle løsningen til differenslikningen er

$$2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos(\frac{\pi}{4}n)\right)+n^2+n-2.$$

d) Finn alle de antideriverte til funksjonen $h(x)$,

$$h(x)=\frac{3}{-3x^2+4x+4}.$$

Løsning: Nevneren til $h(x)$ har røtter 2 og $-\frac{2}{3}$. Vi kan faktorisere og forkorte $h(x)$

$$h(x) = \frac{3}{-3(x-2)(x+\frac{2}{3})} = -\frac{1}{(x-2)(x+\frac{2}{3})}.$$

Når vi skal finne alle de antideriverte, har vi

$$\int h(x)dx = -\int \frac{1}{(x-2)(x+\frac{2}{3})}dx.$$

Vi ser at vi må bruke delbrøksoppspaltning som integrasjonsteknikk. For $A, B \in \mathbb{R}$, kan vi skrive

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-2)(x+\frac{2}{3})} &= \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+\frac{2}{3})} \\ &= \frac{A(x+\frac{2}{3}) + B(x-2)}{(x-2)(x+\frac{2}{3})}\end{aligned}$$

Sammenlikner vi tellerne på begge sider av likningen, får vi

$$1 = Ax + \frac{2}{3}A + Bx - 2B$$

Sammenlikner vi koeffisentene på begge sider av likningen, får vi

$$\begin{aligned}1 &= \frac{2}{3}A - 2B \\ 0 &= A + B\end{aligned}$$

Vi får $A = \frac{3}{8}$ og $B = -\frac{3}{8}$.
Dermed får vi

$$\begin{aligned}\int h(x)dx &= -\frac{3}{8}\int \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x+\frac{2}{3})}dx \\ &= -\frac{3}{8}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{(x+\frac{2}{3})}dx\end{aligned}$$

Disse integralene kan løses ved hjelp av substitusjonene

$$\begin{aligned}u_1 &= x - 2 \\ du_1 &= dx \\ u_2 &= x + \frac{2}{3} \\ du_2 &= dx.\end{aligned}$$

Dermed er, for $C \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\int h(x)dx &= -\frac{3}{8}\int \frac{1}{(x-2)}dx + \frac{3}{8}\int \frac{1}{(x+\frac{2}{3})}dx \\
&= -\frac{3}{8}\int u_1^{-1}du_1 + \frac{3}{8}\int u_2^{-1}du_2 \\
&= -\frac{3}{8}\ln|u_1| + \frac{3}{8}\ln|u_2| + C \\
&= \frac{3}{8}\ln\frac{|u_2|}{|u_1|} + C \\
&= \frac{3}{8}\ln\frac{|x+\frac{2}{3}|}{|x-2|} + C.
\end{aligned}$$

e) For en funksjon $y(t)$ har vi differensiallikningen

$$y' = (P-y)^2 \cdot t,$$

der $P$ er en konstant forskjellig fra 0. Finn et uttrykk for $y(t)$ når du får oppgitt at $y(0) = 0$. Beregn også $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Løsning: Dette er en separabel difflikning, som separeres til

$$(P-y)^{-2}\frac{dy}{dt} = t$$

Vi integrerer med hensyn på $t$ på begge sider og får

$$\int (P-y)^{-2}dy = \int tdt$$

Vi behandler først integralet på venstre side. Her må vi bruke substitusjonen (Det er kanskje fristende å bruke delbrøksoppspaltning, men vi har en multippel rot i nevner, så vår metode vil ikke fungere.);

$$\begin{aligned}
u &= P - y \\
du &= -dy,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int (P-y)^{-2}dy &= \int -u^{-2}du \\
&= -\frac{u^{-2+1}}{-2+1} \\
&= u^{-1} \\
&= \frac{1}{P-y}.
\end{aligned}$$

Integralet på høyre side er elementært, $C \in \mathbb{R}$,

$$\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Tilsammen får vi

$$\frac{1}{P-y} = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Vi må rydde opp i dette for å finne $y(t)$;

$$P - y = \frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C}.$$

$$y(t) = P - \frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + C}.$$

Vi bruker initialbetingelsen for å finne verdien av $C$ som gjør at funksjonen $y(t)$ oppfyller initialbetingelsen $y(0) = 0$.

$$y(0) = 0 = P - \frac{1}{\frac{1}{2}0^2 + C}$$

$$0 = P - \frac{1}{C}$$

$$C = \frac{1}{P}.$$

Vi får funksjonen

$$y(t) = P - \frac{1}{\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{P}}.$$

Når vi lar $t$ vokse vil det andre leddet i funksjonen gå mot 0. Det er fordi nevneren går mot uendelig. Vi har derfor

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = P.$$

f) En funksjon $y(x)$ oppfyller

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{og} \qquad y(1) = e^{-1}.$$

Finn denne funksjonen og bestem $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Løsning: Dette er en separabel difflikning, og vi får de elementære integralene som til slutt gir oss et uttrykk for $y(x)$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$\ln|y| = -x^{-1} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = |y| = e^{-x^{-1}+C} = e^C e^{x^{-1}}$$

$$y(x) = Ke^{-x^{-1}}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Vi bruker deretter initialbetingelsen, $y(1) = e^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
y(1) = e^{-1} &= Ke^{-1^{-1}} \\
e^{-1} &= Ke^{-1} \\
K &= 1
\end{aligned}
$$

Vi får

$$y(x) = e^{-x^{-1}}.$$

Siden

$$\lim_{x\to\infty} x^{-1} = 0,$$

har vi at

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = e^{0} = 1.$$

g) En første ordens differensiallikning er på formen

$$y' + \alpha y = e^{-\alpha x},$$

der $\alpha$ er en reell konstant. Med initialbetingelsen $y(0) = \alpha$, finn et uttrykk for $y(x)$. Deriver dette uttrykket og sjekk at det passer i differensiallikningen. La så $\alpha$ variere og beskriv hvordan $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ avhenger av $\alpha$. (Hint: La $\alpha$ være negativ, null og positiv.)

Løsning: Vi finner først integrerende faktor.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \alpha \\
F(x) &= \alpha x \\
e^{F(x)} &= e^{\alpha x}
\end{aligned}
$$

Når vi ganger likningen med integrerende faktor får vi

$$e^{\alpha x} y' + \alpha e^{\alpha x} y = e^{-\alpha x} e^{\alpha x}.$$

Vi gjenkjenner venstre side av likningen som $(ye^{\alpha x})'$ og høyre side som 1,

$$(ye^{\alpha x})' = 1.$$

Så integrerer vi mhp $x$ på begge sider. Vi får da, $C \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
ye^{\alpha x} &= x + C \\
y(x) &= \frac{x + C}{e^{\alpha x}}
\end{aligned}
$$

Vi har initialbetingelsen $y(0) = \alpha$, og får

$$y(0) = \alpha = \frac{0 + C}{e^{\alpha 0}}$$
$$C = \alpha.$$

Totalt får vi

$$y(x) = (x + \alpha)e^{-\alpha x}.$$

Vi deriverer ved hjelp av produktregelen og kjerneregelen;

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-\alpha x} + (x + \alpha)(-\alpha)e^{-\alpha x} \\ &= e^{-\alpha x}(1 - \alpha x - \alpha^2). \end{aligned}$$

Setter inn dette i likningen og får

$$e^{-\alpha x}(1 - \alpha x - \alpha^2) + \alpha(x + \alpha)e^{-\alpha x} = e^{-\alpha x}.$$

Likningen holder, og vi har kommet fram til riktig svar!

Lar så $\alpha < 0$. Siden vi har $e^{-\alpha x}$ som faktor i $y(x)$, vil dette gå mot uendelig når $x$ går mot uendelig. Vi får

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Lar så $\alpha = 0$. Da er $y(x) = x$ og

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty.$$

Lar så $\alpha > 0$. Siden vi har $e^{-\alpha x}$ som faktor i $y(x)$, vil dette gå mot 0 når $x$ går mot uendelig. Vi får

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

h) For $x$ som oppfyller $\sin x > 0$ har vi differensiallikningen

$$y' - \frac{1}{\tan x} y = \frac{1}{\tan x}.$$

Denne likningen kan betraktes enten som en første ordens likning, eller som en separabel likning,

$$y' = \frac{1}{\tan x}(y + 1).$$

Løs likningen med begge metoder.

Løsning: Husk at

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

betyr at

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

**Løser likningen som første ordens likning:**

Finner integrerende faktor

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{\tan x} \\ &= -\frac{\cos x}{\sin x} \\ F(x) &= \int -\frac{\cos x}{\sin x} dx. \end{aligned}$$

Her må vi bruke substitusjon;

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x dx \end{aligned}$$

Det gir oss

$$\begin{aligned} F(x) &= -\int \frac{1}{u} dx \\ &= -\ln|u| \\ &= -\ln|\sin x| \\ &= -\ln(\sin x). \end{aligned}$$

Den siste likheten skyldes at vi i oppgaveteksten antar at $\sin x > 0$.

Integrerende faktor er dermed

$$\begin{aligned} e^{F(x)} &= e^{-\ln(\sin x)} \\ &= e^{\ln(\sin x)^{-1}} \\ &= (\sin x)^{-1} \\ &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Når vi ganger likningen med integrerende faktor får vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} y' - \frac{1}{\tan x} \frac{1}{\sin x} y &= \frac{1}{\sin x} \frac{1}{\tan x} \\ (\frac{1}{\sin x} y)' &= \frac{\cos x}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

Vi integrerer mhp $x$ på begge sider og får

$$\frac{1}{\sin x}y = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$$

Vi må bruke substitusjon igjen;

$$\begin{aligned} u &= \sin x \\ du &= \cos x dx \end{aligned}$$

Dermed har vi, med $C \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x}y &= \int \frac{1}{u^2}du \\ &= -u^{-1} + C \\ &= -\frac{1}{\sin x} + C \end{aligned}$$

Løser vi likningen for $y$ ved å dele på $\frac{1}{\sin x}$, får vi

$$y(x) = -1 + C \sin x$$

**Løser likningen som separabel likning:**

Separerer, innfører notasjon $y' = \frac{dy}{dx}$ og integrerer.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\tan x}(y+1) \\ \frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\tan x} \\ \frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \int \frac{1}{y+1}\frac{dy}{dx}dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \\ \int \frac{1}{y+1}dy &= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \end{aligned}$$

Integralet på venstre side løses ved substitusjon. (Vi tar integrasjonskonstanten med i integralet på høyre side.)

$$\begin{aligned} u &= y + 1 \\ du &= dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y+1}dy &= \int \frac{1}{u}du \\ &= \ln|u| \\ &= \ln|y+1|. \end{aligned}$$

Integralet på høyre side er løst ved substitusjon tidligere i oppgaven (bare et fortegn i forskjell), $C \in \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(\sin x) + C$$

Vi må rydde opp i uttrykket vi får, med $K \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|y+1| &= \ln(\sin x) + C \\
e^{\ln|y+1|} &= e^{\ln(\sin x)+C} \\
|y+1| &= e^C e^{\ln(\sin x)} \\
y+1 &= K \sin x \\
y(x) &= -1 + K \sin x.
\end{aligned}$$

Vi ser at vi får samme svar med begge metoder!