MAT 1001

Vår 2010

Oblig 2

Innleveringsfrist: Fredag 23.april kl. 1430

Oppgaven leveres stiftet med forsideark på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Oppgaven vil bli vurdert i henhold til gjeldende reglement:

`http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml`.

Videre vil det ved rettingen gis 0-5 poeng på hver deloppgave. Oppgaven vil bli godkjent når alle deloppgaver er forsøkt løst **og** det er oppnådd mer enn 20 poeng.

a) En harmonisk svingning er gitt som en sum av to delsvingninger

$$H(x) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Skriv $H(x)$ på formen $A\cos(\omega(x - x_0))$.

b) For $c \in \mathbb{R}$ har vi differenslikningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + c \cdot x_n = 0.$$

Beskriv hva slags løsninger vi får for varierende verdier av c. En verdi for c gir oss kun én rot i det karakteristiske polynomet. Skriv opp den generelle løsningen av likningen i dette tilfellet.

c) Vi har differenslikningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n^2 + n.$$

Finn løsningen av denne likningen som tilfredsstiller $x_0 = 0$ og $x_1 = 2$. (Hint: Bruk reell form.)

d) Finn alle de antideriverte til funksjonen $h(x)$,

$$h(x) = \frac{3}{-3x^2 + 4x + 4}.$$

e) For en funksjon $y(t)$ har vi differensiallikningen

$$y' = (P - y)^2 \cdot t,$$

der P er en konstant forskjellig fra 0. Finn et uttrykk for $y(t)$ når du får oppgitt at $y(0) = 0$. Beregn også $\lim_{t \to \infty} y(t)$.

f) En funksjon $y(x)$ oppfyller

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \qquad \text{og} \qquad y(1) = e^{-1}.$$

Finn denne funksjonen og bestem $\lim_{x \to \infty} y(x)$.

g) En første ordens differensiallikning er på formen

$$y' + \alpha y = e^{-\alpha x},$$

der α er en konstant. Med initialbetingelsen $y(0) = \alpha$, finn et uttrykk for $y(x)$. Deriver dette uttrykket og sjekk at det passer i differensiallikningen. La så α variere og beskriv hvordan $\lim_{x \to \infty} y(x)$ avhenger av α. (Hint: La α være negativ, null og positiv.)

h) For x som oppfyller $\sin x > 0$ har vi differensiallikningen

$$y' - \frac{1}{\tan x} y = \frac{1}{\tan x}.$$

Denne likningen kan betraktes enten som en første ordens likning, eller som en separabel likning,

$$y' = \frac{1}{\tan x}(y + 1).$$

Løs likningen med begge metoder.