UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1010 — Matematikk i praksis 2.
Eksamensdag:	Fredag 10. juni 2005.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Alle skriftlige hjelpemidler og godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

I denne oppgaven skal vi være med Onkel Skrue, Donald og nevøene på leting etter gull i Alaska, i byen Gotrich som ligger i Gotrich-dalen. Det som vi vet, men som ikke de vet, er at den gjenværende gullmengden i Gotrichdalen er beskrevet av funksjonen

$$f(x, y) = 2 - (x^2 + 2y^2)^2 + (x^2 + 2y^2)$$

over et område G som vi angir ved at $G = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$. Selve byen Gotrich plasserer vi i punktet $(1, 0)$.

Oppgave 1.

Vi skal beregne maksimum og minimum for f i området G.

a) Beregn de partielt deriverte av f og bruk dette til å vise at de kritiske punktene til f på det indre av området G, dvs. der $x^2 + 2y^2 < 1$, er $(0, 0)$ og alle punktene på kurven $x^2 + 2y^2 = \frac{1}{2}$. Hva slags punkt er $(0, 0)$, maksimums-, minimums- eller sadelpunkt?

b) Vis at kurvene

$$x^2 + 2y^2 = k$$

for positive konstanter k danner nivåkurver for funksjonen f, og finn største og minste verdi for f på området G.

(Fortsettes side 2.)

Onkel Skrue og nevøene har bestemt seg for å gå gjennom området gitt ved $-1 \leq x \leq 0$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$. Gullmengden i dette området er gitt ved integralet av funksjonen f over området.

Oppgave 2.

Beregn integralet

$$\int_{-1}^{0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x,y)\, dy\, dx$$

for å finne gullmengden i området.

Oppgave 3.

Onkel Skrue sniffer gull og kan kjenne hvilken retning han må gå for at gullukta skal øke. Anta at Onkel Skrue står i punktet $(-\frac{1}{2}, 0)$. Beregn gradienten ∇f til f i dette punktet og finn retningen som Onkel Skrue må gå i for at gullukta skal øke mest mulig.

Oppgave 4.

På veggen i banken i Gotrich henger en plakat som viser hvor mye gull som til en hver tid til sammen er tatt ut i Gotrich-dalen. Det viser seg at denne mengden y tilfredsstiller differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

der k og M er positive konstanter.

a) Finn den generelle løsningen av differensiallikningen.

b) Finn den spesielle løsningen til likningen når vi setter $y_0 = y(0) = 1$ og konstantene $M = 10$ og $k = \frac{\ln 81}{500}$. Hva blir $y(50)$?

Oppgave 5.

På en annen plakat i banken i Gotrich står det at antall gullgravere i Gotrich i år n etter toppåret da onkel Skrue grunnla sin formue nokså nøyaktig kan beskrives av differenslikningen

$$x_{n+1} = 0,8 \cdot x_n + 5$$

(Fortsettes side 3.)

a) Finn løsningen til differenslikningen

$$x_{n+1} = 0,8 \cdot x_n + 5$$

når vi setter $x_0 = 200$.

b) Når $n \to \infty$ vil antallet gullgravere stabilisere seg. Finn dette antallet.

SLUTT