MAT 1010 – Våren 2008

Oppgave 5.

a) Ledig kapasitet er $10000 - y$

Relativ vekst er $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}$

At relativ vekst er proporsjonal med ledig kapasitet betyr at

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = a(10000-y) \quad \text{for en konstant } a$$

dvs

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dt} = ay(10000-y)}}$$

I følge formel er generell løsning

$$y = \frac{10000}{1+ke^{-10000at}}$$

$$y(0) = \frac{10000}{1+k} = 5000 \Rightarrow k = 1, \text{ altså } \underline{\underline{y = \frac{10000}{1+e^{-10000at}}}}$$

b) Det er gitt at for $t = 0$ er $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 0.05$ og $y = 5000$

Dette gir ved tiden $t = 0$

$$0.05 = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = a(10000-y) = a(10000-5000) = 5000a$$

$$\Rightarrow a = 10^{-5} \text{ og } y(t) = \frac{10000}{1+e^{-0.1t}}, \text{ så}$$

$$y(20) = \frac{10000}{1+e^{-2}} = \underline{\underline{8808}} \text{ kaniner}$$

MA 001 – Våren 1991 – Oppgave 4

a) $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{a}{y^k}$ $y(0)=1$ Separabel diff. lign.

$a>0,\ k>0$

Separerer variable

$$y^{k-1}\,dy = a\,dt$$

Integrerer hver side

V.S: $\int y^{k-1}dy = \frac{1}{k}y^k$

H.S: $\int a\,dt = at + C$

$\Rightarrow \frac{1}{k}y^k = at + C$

$$y^k = kat + kC$$

$y(0)=1$ gir

$$1 = y^k(0) = kC \Rightarrow C = \frac{1}{k} \Rightarrow y^k = kat + 1$$

$$\underline{\underline{y = (kat+1)^{1/k}}}$$

b) Ved $t=0$ er $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = 1$, dvs. $a = y^k = 1$ og $y = (kt+1)^{1/k}$

Ved $t=4$ er $\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{9}$, dvs.

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y^k} = \frac{1}{kt+1} = \frac{1}{4k+1} \Rightarrow k=2$$

Altså $a=1$, $k=2$ og $y = (2t+1)^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{2t+1}}}$

(Ser at informasjonen om at $y(4)=3$ er overflødig, men korrekt)