

# MAPLE-LAB 1

Denne labøvelsen (og neste) gir en kort opplæring i elementær bruk av programmet Maple. Dere får dermed et lite glimt av mulighetene som finnes i Maple. Interesserte oppfordres til å utforske videre det Maple har å tilby på egen hånd.

**1.** Finn og sett i gang Maple på din PC / arbeidsstasjon. *Hvis du sitter på en Linux-basert maskin og opplever problemer underveis med Maple bør du få i gang Windows og starte Maple derfra.* Etter en kort stund kommer det gjerne frem et Maple-dokument på din skjerm. Det kommer også ofte opp et tips-vindu og en svart huskelapp over en del kommandoer; begge disse lukker du vekk i denne omgangen. Selve dokumentet heter Untitled (inntil du evt velger å gi det et eget navn, f.eks. ved lagring). Dersom Maple ikke automatisk starter med å åpne et dokument må du må åpne ett selv. Du kan alltid åpne et nytt dokument ved å velge New -> Dokument mode i File-menyen (øverst til venstre). Velger du New -> Worksheet Mode istedet, blir dokumentet slik de var på eldre utgaver av Maple, og sånne skal vi ikke bry oss om.

Det er meningen at du skal skrive inn og utføre i dokumentet det du blir bedt om å gjøre. På slutten finner du noen oppgaver som du kan prøve deg på senere. Fasit kommer neste uke.

Maple kan brukes til å skrive vanlig tekst, med eller uten matematiske formler, og utføre beregninger om hverandre i samme dokument. Hele denne lab-øvelsen er f.eks. skrevet som et Maple-dokument. Dette skal vi ikke gjøre mye ut av, bare litt :

Markøren som blinker i dokumentet du ser på din skjerm står litt på skrått; det betyr at den venter på at du skal skrive noe matematisk. For å kunne skrive inn vanlig tekst må du klikke på **Text** i det grå feltet ovenfor der markøren står og blinker. **Gjør det.**

Legg merke til at markøren står nå rett opp (og blinker), noe som betyr at den venter på at du skal skrive inn tekst. **Skriv navnet ditt etterfulgt av LAB1 i dokumentet.** Ser du litt rundt omkring i det grå feltet ser du forskjellige muligheter for å forandre skrifttype, fonter, størrelse, osv.

For å kunne gå tilbake til det å kunne skrive matematiske formler og uttrykk må du nå klikke på **Math** i det samme grå feltet. **Gjør det og trykk Enter-tasten et par ganger** for å skape litt avstand fra teksten du skrev.

**2.** La oss utføre en enkel utregning.

De fire vanlige operasjonene med tall, addisjon, sustraksjon, multiplikasjon og divisjon skrives ved tastene +, -, \*, og / i Maple.

Det er lett å glemme å skrive \* når man skal gange sammen tall eller uttrykk. Maple vil ofte tolke operasjonen riktig selv om du glemmer det, men ikke alltid; så det er lurt å alltid skrive \* for å gange sammen. Maple bruker samme prioriteringsrekkefølge mellom de forskjellige operasjonene som du antagelig er vant med fra bruk av kalkulator. Er du i tvil er det alltid lurt å spandere noen paranteser.

Du skal nå regne ut tallet  $\frac{2 \cdot 7 + 4 \cdot 13 - \frac{19 \cdot 5}{7}}{6}$  ved å skrive det inn i dokumentet.

**Gjør det og trykk så Enter-tasten.**

Dersom du har gjort det riktig kommer svaret i blått midt i linjen under og markøren flytter seg til neste linje under det igjen, klar for en ny beregning.

Dersom det er noe galt i kommandoen som man ber Maple om å utføre, kommer Maple med en **feilmelding**. Du kan rette opp i selve uttrykket du allerede har skrevet.

Ofta vil feilen kunne skyldes en ren skrivefeil. Maple tilbyr ellers ganske mye hjelp for å forklare hva som kan være galt. Dra ned **Help**-menyen (øverst til venstre) og undersøk hva som tilbyes en gang du har tid.

**3.** Nå ønsker vi at svaret på utregningen ovenfor helst skal komme på samme linje. Dette gjør du slik :

**Kopier (på vanlig måte) tallet**  $\frac{2 \cdot 7 + 4 \cdot 13 - \frac{19 \cdot 5}{7}}{6}$  **over til feltet der markøren står og venter.**

**Flytt så muspila til et sted i uttrykket for tallet og høyreklikk med musen meny åpner seg**, som tilbyr tilgjengelige operasjoner som Maple kan gjøre med dette uttrykket.

**I denne menyen velger du Evaluate and Display inline.** Da kommer svaret på samme linje.

**4.** I beregningen(e) ovenfor brukte vi bare rasjonale tall og Maple oppgir da svaret som et rasjonalt tall. Dersom det inngår minst et tall på desimalform i et uttrykk vil Maple oppgi svaret på desimalform (Som regel oppgir Maple svaret ved å bruke opptil 10 desimaler; dette kan man forandre på hvis man vil).

Et alternativ er å høyreklikke på svaret og velge **Approximate -> 5** i menyen som åpner seg. **Gjør det.**

Da ser du at svaret kommer på desimalform, med 5 desimalsifre. Skulle du ønske 10 desimalsifre velger du **Approximate -> 10** i stedet.

**5.** Vi skal nå regne ut  $1.2734^{10}$  og  $100^{\frac{1}{3}}$ .

Du trenger da å vite at uttrykket  $a^b$  tastes inn som  $a^b$  i Maple

Alternativt kan du åpne paletten kalt **Expression** (som du finner i menyen på venstre siden av dokumentet).

Klikk da på  $a^b$  i denne paletten :  $a^b$  kommer da frem i dokumentet ditt der markøren befinner seg. Så erstatter du  $a$  og  $b$  med det du ønsker. For å gjøre dette må du bruke pil-tastene og/eller muspila til å manøvrere. Samme fremgangsmåten kan du bruke for alle uttrykkene du ser i Expression-paletten; de fleste er nokså selvforklarende og du skal bruke flere av disse senere.

**Skriv nå inn og beregn**  $1.2734^{10}$ . (Om du vil ha svaret på samme linje er opptil deg). Svaret du får er da automatisk på desimalform.

**Skriv så inn**  $100^{\frac{1}{3}}$  **og be Maple beregne det**, akkurat som du gjorde ovenfor.

Maple prøver da å beregne  $100^{\frac{1}{3}}$  som et rasjonalt tall (siden vi oppga bare rasjonale tall i uttrykket). Det klarer den ikke, så den returnerer bare selve talluttrykket tilbake. Da er det to muligheter :

Du kan jo høyreklikke på svaret (eller uttrykket) og velge Approximate  $\rightarrow$  5 (eller 10).

Eller du kan flytte muspila inn i  $100^{\frac{1}{3}}$ , endre det til  $100.0^{\frac{1}{3}}$  og be Maple beregne det istedet. **Gjør en av delene**. Da kommer svaret på desimalform.

**6.** Mange av de vanlige konstantene og funksjonene finnes ferdig lagret i Maple .

Tallet  $\pi$  og Euler-tallet  $e$  finner du f.eks. begge i paletten **Common Symbols** i menyen på høyresiden. Hvis du skriver pi eller bokstaven  $e$  direkte inn i et matematisk uttrykk vil Maple oppfatte disse som symboler og ikke som tall. Så du bør ikke gjøre det når det er snakk om beregninger. Hvis du gjerne vil skrive disse tallene direkte inn i et matematisk uttrykk kan du skrive disse som Pi og exp(1).

I **Expression**-paletten finner du f.eks.  $e^a$ ,  $\ln(a)$  og de trigonometriske uttrykkene  $\sin(a)$ ,  $\cos(a)$  og  $\tan(a)$ . De fire siste kan du bare skrive rett inn, så du trenger egentlig ikke å bruke paletten for disse.

**Skriv nå inn uttrykket**  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + \ln(3 + 5 \cdot e^{-2})$  **og beregn det på desimalform med 10 desimalsifre**.

**7.** Maple kan regne med symbolske uttrykk der det inngår en eller flere variable, slik som polynomer og trigonometriske funksjoner. Variablene i slike uttrykk kalles ofte  $x$ ,  $y$  eller  $z$  av gammel vane, men du kan bruke (nærmest) hva du vil av bokstavkombinasjoner. Vi tar med et par eksempler.

La oss si du skal gange ut produktet  $(x + 2y + 3z) \cdot (x - y + 4z)$ .

**Skriv inn dette uttrykket. Høyreklikk på det og velg Expand i menyen.**

Svaret blir et polynom i  $x$ ,  $y$  og  $z$ . **Høyreklikk på dette polynomet og velg Factor i menyen**. Du får da uttrykket tilbake på produktform.

Ofte kan du prøve andre opsjoner i menyen hvis du ønsker å forenkle eller omforme et uttrykk:

**Skriv inn**  $3 \cdot \cos(2 \cdot x) - 4 \cdot \sin(x)^2$ . **Høyreklikk på det og velg Simplify i menyen.**

**Skriv inn**  $\sin(x) \cdot \cos(y)$ . **Høyreklikk på det og velg Combine i menyen.**

Det fins andre muligheter som du kan utforske på egenhånd når du har tid.

**8.** Ofte vil man evaluere et symbolsk uttrykk ved å fastsette verdien(e) av en eller flere av variablene som inngår. Dette kan gjøres ved å **høyreklikke på uttrykket og velge Evaluate at a point** i menyen; det kommer da opp en dialogboks hvor man fyller inn de ønskede verdiene av variablene.

**Bruk denne metoden til å evaluere  $(x + 2y + 3z) \cdot (x - y + 4z)$  når  $y = 3$  og  $z = -5$ .**

En ulempe med denne metoden er at Maple ikke viser på skjermen hvilke verdier av  $y$  og  $z$  vi valgte under beregningen. Ved en senere gjennomlesning vil det kunne være vanskelig å huske det. Vi kan istedet velge følgende fremgangsmåte, som er noe mer tungvinn :

**Høyreklikk på  $(x + 2y + 3z) \cdot (x - y + 4z)$  og velg : Constructions -> Evaluate at -> y ; angi så verdien 3 i dialogboksen.**

**Høyreklikk på svaret du får og velg Evaluate.** Verdien  $y = 3$  er nå satt inn i uttrykket. **Gjenta så denne metoden for å få satt inn verdien  $z = -5$ .**

**9.** Maple er ganske flink til å løse likninger og likningsystemer. Her er et par eksempler :

Du skal finne røttene til  $x^2 + x - 1 = 0$  :

**Skriv inn denne likningen. Høyreklikk på den og velg Solve -> Solve i menyen.**

Du finner flere opsjoner i denne menyen :

**Løs likningen en gang til, men velg nå Solve -> Numerically Solve.**

**Bruk så begge disse fremgangsmåtene til å finne løsninger av likningen**

$$x^3 + 5 \cdot x = 6 .$$

Legg da merke til at Maple oppgir tre løsninger ved den første måten. To av disse er komplekse (dersom du tar MAT1010 vil du snart lære hva komplekse tall er). Ved den andre fremgangsmåten oppgir Maple bare den reelle løsningen  $x = 1$ . Nå finnes det ingen andre reelle løsninger til denne likningen, så det er jo greit. Men det er verdt å merke seg at når man velger **Solve -> Numerically Solve**, så oppgir Maple kun en løsning selv om det finnes flere løsninger. Det samme kan også skje med Solve -> Solve. Her er et eksempel :

**Skriv inn likningen  $\sin(x) = \cos(x)$ . Høyreklikk på denne og velg Solve -> Solve. Gjenta dette med Solve -> Numerically Solve.**

I begge tilfellene oppgir Maple bare en av løsningene . Likningen  $\sin(x) = \cos(x)$  har faktisk uendelige mange løsninger, nemlig alle tall på formen  $\frac{\pi}{4} + k\pi$  der  $k$  er et helt tall.

Dette betyr at man kan ikke stole blindt på **Solve** (og Maple). Ved løsning av likninger er det en god vane å skrive om likningen på formen  $f(x) = 0$ , tegne grafen til funksjonen  $f(x)$  i et passende intervall for å prøve å få et inntrykk over nullpunktene til funksjonen i dette intervallet. Også her må man av og til være på vakt og ikke la seg lure av første inntrykket (se oppgave 4 til slutt).

**10.** Det er enkelt å få Maple til å tegne grafen til en funksjon av en variabel. Maple kan også tegne mange andre geometriske figurer, men det tar vi ikke nå.

La oss si at vi ønsker å tegne grafen til funksjonen  $\sin(x) - \cos(x)$ , f.eks. for å finne ut hvor denne funksjonen har nullpunkter.

**Skriv inn  $\sin(x) - \cos(x)$ , høyreklikk på den og velg Plots -> 2-D Plot.**

Grafen kommer opp i et bilde til høyre for funksjonsuttrykket.

I utgangspunktet velger Maple å la  $x$  variere i intervallet  $[-10, 10]$  hvis det gir mening. Dette kan vi forandre på :

**Flytt muspila til et sted i bildet med grafen og klikk en gang :**

Muspila blir til en liten sirkel som du kan bevege i bildet med musa. Hvis du ser rett over selve dokumentet kan du se du at verktøy-raden har forandret utseende og at **Plot** nå er blitt uthevet. Helt til venstre i denne raden kan du lese av koordinatene til punktet som muspila peker på. De andre ikonene i raden kan du bruke til å forandre utseende på grafen og aksene. Klikk på disse etter tur og bli kjent med alle mulighetene som finnes !

**Klikkspesielt på den tredje borteste firkanten til høyre** (den som fremstiller et lite koordinat system) : en dialogboks kommer opp som heter **Axis properties**. Der kan du forandre på verdiene som er valgt for akse-lengdene i bildet, og mere til; du kan f.eks. sørge for at x-aksen bli avmarkert med multipler av  $\pi$ , og det passer jo fint for grafen du ser på akkurat nå.

I stedet for å bruke denne verktøy-raden kan du flytte muspila til et sted i grafen og høyreklikke : menyen du får opp da gir deg omtrent de samme mulighetene.

Hvis du absolutt vil styre hvilket intervall  $x$ -verdiene skal variere i før grafen vises første gang, kan du velge **Plots -> Plots Builder** i stedet for **Plots -> 2-D Plot** som du valgte ovenfor.

Hvis du ønsker å tegne to grafer i samme aksesystem, skriver du bare begge funksjonsuttrykkene ved siden av hverandre, adskilt med et komma, og går ellers frem akkurat som før. Den første grafen kommer i rødt, den andre i blått. Fargene kan forandres om ønskelig ved hjelp av verktøy-raden for Plot.

**Lag et bilde med begge grafene til funksjonene  $\ln(1+x)$  og  $x - \frac{1}{2}x^2$ .** Prøv å få til at begge grafene vises bare for alle  $x$  i intervallet  $\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$ .

**11.** Maple kan regne ut de aller fleste grensene du vil komme borti. Vi ser på et par eksempler :

Vi ønsker å vite om uttrykket  $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  nærmer seg en bestemt verdi når  $x$  nærmer seg 0. Setter vi inn  $x=0$  får vi  $\frac{0}{0}$ , som er et såkalt ubestemt uttrykk. Grenseverdien kan beregnes for hånd ved hjelp av

l'Hospitals regel. Med Maple kan du gjøre det på (minst) to måter :

**Skriv inn**  $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  **og høyreklikk på det; velg da** **Constructions -> Limit -> x i menyen; i dialogboksen (Specify limit point) som kommer opp skriver du 0 og trykker OK.** Som svar skriver Maple  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  . **Høyreklikk på det og velg Evaluate.** Grenseverdien kommer da til høyre.

For den andre måten gjør du slik : **åpn opp Expression-paletten, trykk på**  $\lim_{x \rightarrow a} f$  , **fill inn 0 for a og**  $\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  **for f . Trykk så Enter eller høyreklikk og velg Evaluate and display inline.**

Begge disse måtene kan brukes når du skal beregne grenser for uttrykk der  $x$  går mot  $\infty$  eller mot  $-\infty$  . Du trenger da å vite at dialogboksen (Specify limit point) må du skrive **infinity** for  $\infty$  , og **-infinity** for  $-\infty$  . Ved den andre måten kan du bare erstatte  $a$  med  $\infty$  (eller  $-\infty$ ) i  $\lim_{x \rightarrow a} f$  ; **symbolet  $\infty$  finner du i paletten Common Symbols**

**Beregn nå grensen**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + a)^{-2} \cdot (3x^2 - b)$  **ved å benytte begge måtene.**

Et par tilleggskommentarer :

Dersom Maple finner ut at en grense ikke eksisterer svarer den som regel **undefined**. Den kan også svare noe på formen  $a..b$  ; f.eks. sier den at  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) = -1..1$  .

Dersom grensen er  $\infty$  eller  $-\infty$  vil Maple svare akkurat det.

Når Maple ikke klarer å finne ut hva grensen er (og det hender, men ikke ofte), gjentar den bare hele grenseuttrykket, som et tegn på at den ikke klarer å regne den ut uten videre.

**12.** Dermed er det slutt for LAB1. LAB2 vil ta opp bl.a. funksjoner, derivasjon, integrasjon, diff. likninger, lineær algebra og Taylor polynomer.

Du kan nå ta vare på Maple-dokumentet du har skrevet ved å velge Save i File-menyen (helt øverst til venstre), og angi en passende tittel og hvor du vil filen skal lagres. Endelsen .mw vil automatisk bli lagt til filnavnet; dette markerer at det er et Maple-dokument.

\*\*\*\*\*

Til slutt, noen Maple-oppgaver som du bør prøve deg på når du får tid. Du kan få hjelp til disse på gruppeundervisningen onsdag 21.01.

### Oppgave 1

a) Beregn  $2.72^{-4}$

b) Beregn  $3^{\frac{1}{10}}$ .

c) Beregn  $\cos\left(\left|\frac{\pi}{2} - 3\right|\right) - \frac{e}{\pi^2}$ .

### Oppgave 2

a) Ekspander  $(a + b)^{10}$  og faktorerer det tilbake.

b) Kombiner  $\cos(x) \cos(y)$ .

c) Sjekk at Maple ikke klarer å faktorisere direkte uttrykket  $2.1x^2 - 3.15xy^3 + y^2x - 1.5y^5$ .

Skriv koeffisientene om til rasjonale tall og prøv igjen.

d) Forenkl  $3 \cos(2x) - 4 \cos(x)^2$ .

e) Ekspander  $(x + 2y) \cdot (3y - 4z) \cdot (x - z)^2$ .

Angi dette uttrykket som et polynom i  $x$  når du setter inn  $y = -1$  og  $z = 4$ .

### Oppgave 3

Lag en pen skisse av grafen til  $y = \tan(x)$  når  $x$  varierer i intervallet  $[-\pi, \pi]$ . Her må du bl.a. begrense  $y$ -verdiene for å få det til.

Finn løsningene av likningen  $\tan(x) = \cos(x)$  i intervallet  $[-\pi, \pi]$ . Lag et bilde som viser både grafen til  $\tan(x)$  og grafen til  $\cos(x)$  i dette intervallet.

### Oppgave 4

Lag en skisse av grafen til polynomet  $64x^4 - 16x^3 + x^2$  for å danne deg et bilde av hva nullpunktene til dette polynomet er. Er  $x=0$  det eneste nullpunktet? Finn ut av det, både grafisk og ved hjelp av Solve.

## Oppgave 5

Beregn følgende grenser om de eksisterer :

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1 + x}{(x + 3)^2}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3}$

e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 1}}{x^3}$