MAPLE-LAB 2

Denne labøvelsen gir en videre innføring i elementær bruk av programmet Maple.

1. Sett i gang Maple på din PC / arbeidsstasjon. *Hvis du sitter på en Linux-basert maskin og opplever problemer underveis med Maple bør du få i gang Windows og starte Maple derfra.* Dersom Maple ikke automatisk starter med å åpne et dokument åpner du ett selv (i Document Mode).

Skriv navnet ditt etterfulgt av LAB2 . Husk å gå over til Math-modus etter det.

2. Derivasjon av et (deriverbart) funksjonsuttrykk $g(x)$ kan gjøres på flere måter med Maple. Vi illustrerer det på et eksempel :

Skriv inn $\frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}$ **og høyreklikk på det; velg da Differentiate -> x i menyen.** Maple skriver da det deriverte uttrykket til høyre på samme linje. Dersom du vil beregne den deriverte av uttrykket i f. eks. $x = 0$ er det bare å evaluere det deriverte uttrykket i $x = 0$ slik du lærte i Lab1. **Gjør det.**

Du kan også gjøre det slik : **åpn opp Expression-paletten , trykk på** $\frac{d}{dx} f$ **, fyll inn for** x (mest aktuell når det er annet variabelnavn enn x i uttrykket)**og sett inn** $\frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}$ **for** f **. Trykk så Enter ,** eller **høyreklikk på uttrykket og velg Evaluate and display inline**
Svaret kommer da på linjen under , eller rett ved siden av.

Dersom du bare vil beregne den deriverte av uttrykket i f.eks. $x = 0$ kan det gjøres direkte slik : **åpn opp Expression-paletten , trykk på** $f(x)\Big|_{x=a}$ **, visk vekk** $f(x)$ **, trykk på** $\frac{d}{dx} f$ **, fyll inn for** x (mest aktuell når det er annet variabelnavn enn x) **, sett inn** $\frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}$ **for** f **og** 0 **for** a ;
Trykk så Enter , eller **høyreklikk på uttrykket og velg Evaluate and display inline .**

Dersom du ønsker å beregne den *andre* deriverte av uttrykket, kan du kopiere det deriverte uttrykket over til ny linje, høyreklikke på det og velge Differentiate -> x ; eller du kan du velge fremgangsmåte nr. 2 for å derivere en gang til. **Gjør en av delene og beregn den andre deriverte av** $\frac{e^{\sin(x)}}{1+x^2}$.

Dersom du ønsker å beregne noen av de høyreordensderiverte, kan du fortsette videre som ovenfor. Men her kan det være nyttig å lære om Maples måte å definere funksjoner på .

For å definere funksjonen g som er gitt ved $g(x) = \dfrac{e^{\sin(x)}}{1 + x^2}$ gjøres det slik :

Åpn opp Expression-paletten , trykk på $f := a \to y$, **fyll inn** g **for** f , x **for** a **og** $\dfrac{e^{\sin(x)}}{1 + x^2}$ **for** y ; **Trykk så Enter** , eller **høyreklikk på uttrykket og velg Evaluate and display inline .**Maple svarer da med $x \to \dfrac{e^{\sin(x)}}{1 + x^2}$.

Poenget er at Maple nå husker at g heretter står for funksjonen du nettopp har definert. Dette kan du sjekke slik :

Skriv inn $g(x)$ **og trykk Enter .**

Skriv inn $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **og trykk Enter .**

Skriv inn $\dfrac{d}{dx} g(x)$ **og trykk Enter .**

Den deriverte funksjonen til g, altså g', er nå tilgjengelig i Maple ved å skrive den som $D(g)$. Sjekk dette :

Skriv inn $D(g)$ **og trykk Enter .**

Skriv inn $D(g)(x)$ **og trykk Enter .**

Skriv inn $D(g)(0)$ **og trykk Enter .**

For å beregne $g''(x)$, eller f.eks. $g''(0)$ direkte, er det nå bare å skrive $D(D(g))(x)$, eller $D(D(g))(0)$, og trykke Enter . **Gjør det.**

Tilvarende kan du f.eks. beregne $g^{(4)}(0)$ ved $D(D(D(D(g))))(0)$ (*da må du passe på parantesene* !).

Etter dette skulle du vel klare å derivere det meste ...

3. Maple er ganske god til å beregne ubestemte integraler, m.a.o. til å antiderivere , forutsatt at den antideriverte kan uttrykkes ved hjelp av "elementære" funksjoner og/eller ved hjelp av et utvalg av funksjoner som selv er antideriverte av bestemte kjente funksjoner (som vi ikke skal prøve å beskrive her, det spiller igrunn liten rolle for oss hva disse er). Her er det bare å prøve seg -- dersom Maple ikke klarer å finne et uttrykk for en antiderivert returnerer den bare det ubestemte integralet tilbake som svar.

Igjen kan man gå frem på flere måter. Vi illustrerer disse ved å beregne $\int (x+1)^3 \ln(x)\, dx$:

Skriv inn $(x+1)^3 \ln(x)$ **og høyreklikk på det ; velg da Integrate -> x i menyen .**
Maple skriver da et uttrykk for den antideriverte til høyre på samme linje (dersom den klarer å finne et).
Prøv det. Her går det bra. **Sjekk at du får** $(x+1)^3 \ln(x)$ **tilbake når du deriverer svaret du fikk .**

Du kan også gjøre det slik :
Åpn opp Expression-paletten , trykk på $\int f\, dx$, **sett inn** $(x+1)^3 \ln(x)$ for f og **fyll inn for** x (mest aktuell når det er et annet variabelnavn enn x i uttrykket).**Trykk så Enter ,** eller **høyreklikk og velg Evaluate and display inline .** Svaret kommer da på linjen under , eller rett ved siden av.

Et eksempel på en funksjon som ikke har en antiderivert som kan skrives ved hjelp av elementære funksjoner er $\sin(x^2)$. **Prøv å integrere denne ved hjelp av Maple.** Her vil du se at Maple kommer med et svar der det inngår en funksjon som nok er ukjent for deg. Men Maple vet jo hva den står for og du kan bruke svaret videre til det du måtte ønske så lenge du bruker Maple).

Et eksempel som Maple ikke klarer å integrere er $\sin(x^2)\cdot\cos(x^3)$. **Sjekk dette .**

Når det gjelder bestemte integraler kan Maple beregne disse, enten eksakt eller approksimativt.

(*For de som tar MAT1011 og som kanskje aldri har hørt om bestemte integraler, nevner vi at det ubestemte integralet* $\int_a^b f(x)\, dx$ er lik $F(b) - F(a)$, der $F(x) = \int f(x)\, dx$.)

Her er noen eksempler på hvordan du kan gå frem.
Du skal beregne $\int_1^4 (x+1)^3 \ln(x)\, dx$:

Åpn opp Expression-paletten , trykk på $\int_a^b f\, dx$, **sett inn** $(x+1)^3 \ln(x)$ **for** f , 1 **for** a , 4 **for** b **, og fyll inn for** x .

Trykk så Enter , eller **høyreklikk og velg Evaluate and display inline** Svaret kommer da på linjen under , eller rett ved siden av. Hvis du vil ha det på desimalform kan du få det til ved å høyreklikke på svaret osv.

Du skal beregne $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$:

Gå frem som ovenfor . Svaret du får da blir du nok ikke spesielt klok av. Men **Høyreklikk på det og velg Approximate -> 10** ; da får du integralet beregnet approksimativt med 10 desimalsiffre .

Du kan få dette svaret direkte på desimalform ved å skrive inn $\int_0^{1.0} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ og gå frem på vanlig måte. **Gjør det.** Grunnen til at det virker er at når du skriver et av tallene i integralet på desimalform, så tolker Maple det slik at du ønsker et svar på desimalform.

Du skal nå beregne $\int_0^1 \sin(x^2)\cdot\cos(x^3)\,\mathrm{d}x$:

Hvis du skriver det rett inn og går frem på vanlig måte får du bare integralet tilbake. **Gjør det .** Du kan få Maple til å beregne dette integralet approksimativt ved å skrive et av tallene i integralet på desimalform. **Gjør det og sjekk at du nå får et svar på desimalform.**

Et alternativ er å skrive inn $evalf\left(\int_0^1 \sin(x^2)\cdot\cos(x^3)\,\mathrm{d}x\right)$ og trykke Enter. Det tvinger Maple til å beregne en approksimativ verdi.

En kommentar til slutt : hvis du har definert en funksjon g i Maple , slik som vi så i forbindelse med derivasjonavsnittet , kan du skrive inn $g(x)$ direkte inn i integralet når du skal beregne et integral (bestemt eller ubestemt).

Prøv nå dette med $\int_0^{1.0} g(x)\,\mathrm{d}x$ og se at du får et svar !

Som sagt , Maple husker at du har definert funksjonen g tidligere i dokumentet du holder på med. Hvis du vil "frigjøre" navnet g kan du skrive inn $g :=$'g' og trykke Enter . Da vil Maple "glemme" at denne har vært definert tidligere.

4. Maple har forskjellige oppsett for å løse differentiallikninger , eksakt og/eller numerisk. Vi skal her bare kort nevne hvordan noen enkle diff.likninger, av den typen man møter på i MAT1010 og i MAT1001, kan løses med Maple.

Man skriver bare inn diff. likningen, høyreklikker på den og velgerSolve DE -> y(x)i menyen (her er y antatt å være en funksjon av x). I svaret inngår det gjerne en konstant eller flere. Maple skriver disse på den litt rare formen _C .

Her er to eksempler :

Skriv inn likningen

$y' + \tan(x)\cdot y = \cos(x)$ (Maple skjønner da at y' betyr den deriverte av y m.h.p. x) **og gjør som**

oppgitt ovenfor .

Skriv inn likningen $y'' + 2y' - 3y = 0$ **og gjør som oppgitt ovenfor .**

Hvis du vil ha med en initialbetingelse (eller flere) i tillegg til diff. likningen, kan du høyreklikke på den, og velge **Solve DE interactively** i menyen.
I boksen som kommer opp trykker du **Edit** i delboksen som heter **Conditions**. Der kan du legge inn en (eller flere) initialbetingelse i den nye boksen som kommer opp. Trykk da på **Add** etter hver betingelse du har angitt. Når du er ferdig med dette trykker du **Done**.
Du kommer da tilbake til den første boksen og nå ser du at initialbetingelsen(e) er lagt inn. Nå kan du trykke **Solve Symbolically** for å se om Maple klarer å finne en eksakt løsning. (Du kan trykke på Solve Numerically hvis du bare vil ha en approksimativ løsning).
Det kommer opp en ny boks der det kan legges inn ønsker om løsningsmetode. Ikke bry deg om disse, bare trykk **Solve**. Løsning av likningen kommer da opp i et vindu i samme boks (hvis Maple har klart å finne noen). Du kan nå trykke Plot dersom du har lyst til å se grafen til løsningen (når den er entydig bestemt).

Prøv denne oppskriften for å løse $y' + \tan(x) \cdot y = \cos(x)$ **med initialbetingelsen** $y(0) = 1$.

Maple løser også mange systemer av diff.likninger , spesielt de av den typen som er tema for kap.11 i Gulliksens bok. Man skriver bare inn lalle likningene etter hverandre, med komma i mellom ; ellers går man frem som ovenfor. Dette bør du prøve senere i semestret !

5. Når det gjelder lineær algebra er det enkelt å skrive inn matriser (og vektorer) i Maple .

Det enkleste er åpne **Matrix paletten** (på venstre siden av dokumentet). Der kan du velge antall rader og kolonner i matrisen (og forhåndsbestemme om matrisen skal ha en spesiell struktur, men det skal vi ikke bry oss om nå), og trykke på **Insert Matrix**. Det kommer da frem en matrise i dokumentet ditt, så kan du bare navigere i denne matrisen og fylle de koeffisienten du ønsker å ha der.

Skriv inn en 3 x 3 matrise der du selv velger koeffisientene.

Høyreklikk på denne matrisen og se på hva menyen tilbyr av muligheter: se spesielt på **Eigenvalues etc** og **Standard Operations .**

Bruk dette til å be Maple regne ut av egenverdier, egenvektorer, determinant og invers (hvis den fins) for din matrise.

Maple kan gjøre mye mer lineær algebra enn dette. Ta f.eks. en titt på **Tools -> Tutors -> Linear Algebra** og prøv noe av det som tilbyes der når du har tid (kanskje idag ?), i alle fall det med løsning av lineære likningssystemer .

6. I kapittel 12 i Gulliksens bok vil du lære litt om funksjoner av to variable, altså av typen $f(x, y)$ der variablene x og y varierer i et område i xy- planet. Maple kan gjøre mye av det samme vi har sett for slike funksjoner. Vi ser bare et par eksempler her.

Skriv inn uttrykket $\dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{1+y^2}$. **Høyreklikk på det og velg Plots -> 3-D Plot -> x, y** i menyen. Grafen til dette funksjonsuttrykket kommer da frem (over et passende rektangel). **Klikk på denne grafen.** Ved hjelp av muspila kan du rotere grafen til posisjonen du liker best. Prøv også noen av knappene i verktøyraden.

Holder du fast y kan du derivere dette uttrykket med hensyn på x. Dette kan gjøres f.eks. ved å trykke på $\dfrac{\partial}{\partial x} f$ i Expression paletten, fylle inn og evaluere. **Gjør det.**

Helt tilsvarende kan du derivere dette uttrykket med hensyn på y. **Gjør det.**

7. Som du kanskje så på forelesning mandag, er Maple et nyttig verktøy for å beregne og illustrere Taylorpolynomer.

Vi betrakter en funksjon $f(x)$ som er deriverbar så mange ganger vi ønsker rundt $x = a$. Minner om at

Taylorpolynomet til f *av grad (opptil)* n *rundt* $x = a$ er gitt ved

$$F_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

Vi vet da at $f(x) \approx F_n(x)$ når x er nær nok a,

m.a.o. at feilen $E_n(x) = f(x) - F_n(x)$ er liten i tallverdi når x er nær nok a.

Det å beregne $F_n(x)$ med Maple er uproblematisk, og vi kan gjøre det direkte utifra definisjonen.

Eksempel. Betrakt $f(x) = \sqrt{4+x} - \ln(\cos(x))$ rundt $x = 0$. Du skal beregne $F_2(x)$.

Du må først beregne koeffisientene til $F_2(x)$: $c_0 = f(0)$, $c_1 = f'(0)$ og $c_2 = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Da vil du ha at $F_2(x) = c_0 + c_1\cdot x + c_2\cdot x^2$.

Her er det lurt å begynne med å definere f som en funksjon av x. **Gjør det .**

Benytt deg nå av f til å beregne koeffisientene c_0 , c_1 og c_2 .

Så er det bare å skrive inn uttrykket for $F_2(x)$ **. Gjør det .** (Her kan du godt definere F_2 som en funksjon av x hvis du vil).

Nå kan du bruke det du har gjort :

Skisser grafene til $f(x)$ **og** $F_2(x)$ **over** $[-1.5, 1.5]$.

Skisser deretter grafen til feilen $E_2(x) = f(x) - F_2(x)$ **over** $[-1, 1]$.

Bestem grafisk de x i $[-1, 1]$ **der vi har** $|E_2(x)| \leq 0.1$ **, så de der vi har** $|E_2(x)| \leq 0.01$.

Beregn $F_2(0.5)$. **Sammenlikn svaret med verdien Maple oppgir for** $f(0.5)$ **approksimativt med 10 desimaler.**

Nå finnes det et ferdig oppsett i Maple for å beregne Taylorpolynomer og illustrere disse :

Gå til verktøyraden helt øverst på skjermen og velg

Tools -> Tutors -> Calculus-Single Variable -> Taylor Approximation

I boksen som kommer opp, kan du skrive inn et uttrykk for $f(x)$, angi graden n (*order* på engelsk) av Taylorpolynomet du ønsker, angi hvilket punkt det skal beregnes rundt, så trykker du **Display** i selve boksen : da kommer uttrykket for $F_n(x)$ frem og grafene til f og F_n vises i et og samme bilde. Hvis du vil styre hvilken intervall disse grafene skal skisseres over, velger du **Plot Options** i selve boksen og fyller de ønskede verdiene inn.

Når du trykker **Close** , vil bildet overføres til dokumentet du holder på med (der markøren befinner seg) .

Hvis du trykker **Animate** , vises en animasjon av grafen til de 10 første Taylorpolynomene etter hverandre, sammen med grafen til f. Her kan du styre farten eller fryse bildet med de knappene som kommer frem.

Hvis du trykker **Close** mens animasjon er aktivert, vil animasjonen overføres til dokumentet du holder på med (der markøren befinner seg).

Kjør dette oppsettet med funksjonen fra eksemplet ovenfor Lek deg litt med de forskjellige mulighetene du har. **Prøv gjerne med andre funksjoner !**

****

Har du tid igjen, kan du prøve deg på oppgavene på neste side. Hvis ikke, bør du se på disse innen plenumsregningen neste uke (*de vil bli gjennomgått da*).

Oppgave 1

Bruk Maple til følgende :

a) Definer $f(x) = 20 \cdot \dfrac{1 - 0.8^x}{1 - 0.8^{20}} - x$ som en funksjon i Maple. Skisser grafen til f over intervallet $[0, 20]$.

b) Beregn $f'(x)$ og $f''(x)$.

c) Finn likningen for tangenten til f i punktet $(10, f(10))$. Skisser tangenten sammen med grafen til f .

d) Likningen $f'(x) = 0$ har en løsning x_0 . Finn denne og sjekk at f oppnår sitt maksimum i dette punktet ved å se på grafen til f. Sjekk at $f''(x_0) < 0$.

Oppgave 2

Betrakt $f(x) = e^{\sin(x)}$ rundt $x = 0$ og dens tilhørende Taylorpolynom F_n . Bruk Maple til følgende :

a) Prøv deg frem og finn en n slik at grafene til f og F_n ser sammenfallende ut over intervallet $[-3.14, 3.14]$.

b) Finn en n slik at $\int_0^{\frac{1}{3}} F_n(x)\, dx$ gir det samme svaret som $\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)\, dx$ når du ber Maple regne disse integralene approksimativt med fem desimaler.

Oppgave 3

Betrakt $f(x) = \sin(\tan(x))$ og $g(x) = \tan(\sin(x))$ rundt $x = 0$. Bruk Maple til følgende :

a) Skisser grafene til f og g sammen, først over $[-0.5, 0.5]$, deretter over $[-1, 1]$, og til slutt over $[-1.5, 1.5]$.

b) Beregn Taylorpolynomet av grad 3 rundt $x = 0$ for både f og g .

c) Finn den første n slik at Taylorpolynomene til f og g av grad (opptil) n rundt $x = 0$ er forskjellige.