Løsningsforslag for oppg. 1 og 3 - MAT1011 - Oblig2

Oppgave 1.

Vi har at $\sin(3\cdot\pi) = 0$ og $\cos(3\cdot\pi) = -1$.

Ved l' Hopitals regel (og kjerneregelen) får derfor vi at

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(\pi\cdot x)}{x^2 - 9} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 3} \frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot x)}{2\,x} = \frac{\pi\cdot\cos(\pi\cdot 3)}{2\cdot 3} = -\frac{\pi}{6} .$$

Vi sjekker dette med Maple :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(\pi\cdot x)}{x^2 - 9}$$

$$-\frac{1}{6}\pi \qquad \textbf{(1)}$$

Oppgave 3

Vi betrakter funksjonen $f(x) = \left(2\sqrt{x} - x\right)^{-1}$ på intervallet $[\frac{1}{2}, 2]$.

a) Ved kjerneregelen har vi at $f'(x) = -\left(2\sqrt{x} - x\right)^{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x} - x\right)^2}$,

og vi ser at $f'(x) > 0$ når $x > 1$ og $f'(x) < 0$ når $x < 1$.

Dermed er f (strengt) avtagende på $[\frac{1}{2}, 1]$ og (strengt) voksende på $[1, 2]$.

Dette betyr at f har minimum når $x = 1$ og $f_{min} = f(1) = 1$.

Videre er $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2} - 1} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.0939$

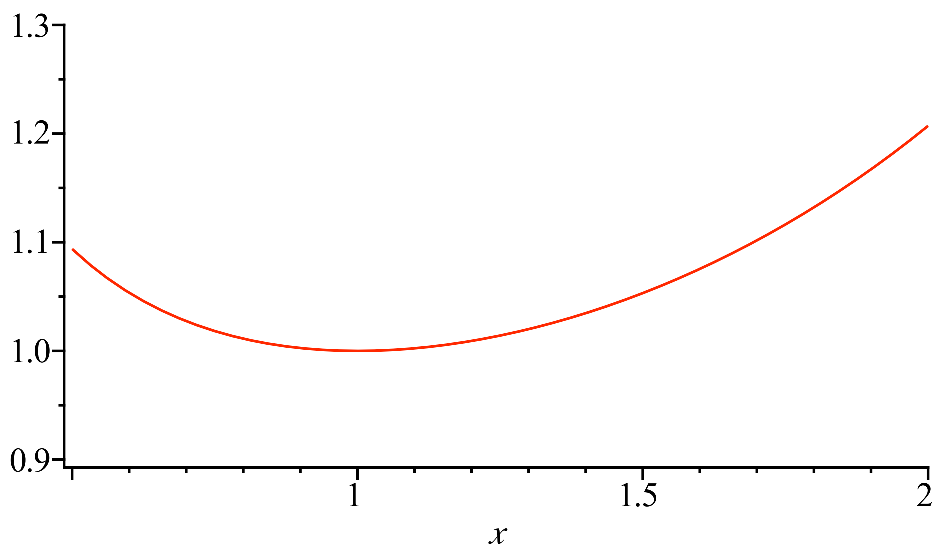
og $f(2) = \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.2071$.

Det gir oss at f har maksimum når $x = 2$ og $f_{maks} \approx 1.2071$.

Alternativt kan vi observere at siden f er kontinuerlig på intervallet $[\frac{1}{2}, 2]$ og $f'(x) = 0$ kun når $x = 1$, så vet vi at
f vil oppnå sine ekstremverdier blandt verdiene vi får når x er lik $\frac{1}{2}$, 1 eller 2 . Vi gjenfinner da det vi fant ovenfor.

Vi sjekker at det vi har svart er fornuftig ved å la Maple tegne grafen til f på det gitte intervallet :

$(2\sqrt{x} - x)^{-1} \rightarrow$



b) Arealet A av området som avgrenses av x-aksen, grafen til f og de vertikale linjene $x = \frac{1}{2}$ og $x = 2$ er gitt ved

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x} - x}\,\mathrm{d}x .$$

Nå er $\displaystyle \int \frac{1}{2\sqrt{x} - x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{x}}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Sett $u = \sqrt{x}$. Da er $u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, så ved å substituere dette i integralet ovenfor får vi at

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-\frac{u}{2}}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{2-u}\,\mathrm{d}u = -2\ln|2-u| + C = -2\ln\left|2-\sqrt{x}\right| + C.$$

Dermed er $A = \left[-2\ln\left|2-\sqrt{x}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = -2\ln\left(2-\sqrt{2}\right) + 2\ln\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\ln\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right).$

Det er mange måter å omskrive dette svaret på, så det kan godt hende at ditt svar "ser" annerledes ut. Men svarene bør være det samme når vi regner dette svaret numersikt med 5 desimaler :

Vi får vi at $A = 2\ln\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2\left(\sqrt{2}-1\right)}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5834$.

Vær obs her på at dersom du har skrevet ditt svar på en annen form, så kan det hende den siste desimalen i tallet du finner ikke er den samme !

Vi sjekker at det vi har gjort er fornuftig ved å la Maple regne ut det bestemte integralet, både eksakt og numeriskt (på to måter) :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\ln(7) - 2\ln(2) - \ln\left(\sqrt{2}+4\right) + \ln\left(-\sqrt{2}+4\right) + \ln\left(\sqrt{2}+2\right) - \ln\left(-\sqrt{2}+2\right)$$
$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5833$$

(vi ser her at Maple har ordnet svaret sitt på en litt annen måte enn oss).

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}-x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 1.5833 .$$

$$\int_{0.5}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}-x}\,\mathrm{d}x = 1.583365018 .$$

NB ! Hvis du ber Maple regne ut det ubestemte integralet vil du se at den oppgir et "rart", og noe komplisert svar . Det skyldes at den har integrert på en annen måte enn det vi har gjort ovenfor. Og det kan godt hende at du har gjort det på en måte som ikke er likt noen av disse !