MAT 1012
Våren 2010

UNIVERSITETET I OSLO

Forelesning

Vi er ferdig med en-variabel-teorien, og vi kan begynne å jobbe med funksjoner i flere variable. Det første vi skal gjøre er å gå gjennom de vanlige analysene vi gjør for funksjoner i en variabel, og se hvordan dette ser ut når vi har flere variable. Hovedfokus er introduksjon av partiell derivasjon.

Funksjoner i flere variable

- Funksjoner i flere variable, grafer, nivåkurver og -plan,
- Partiell derivasjon
- Høyere ordens partielt deriverte

Definisjon

En avbildning

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kalles en funksjon i n variable og vi skriver $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Funksjoner i flere variable

Definisjon og eksempler

Definisjon

En avbildning

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kalles en funksjon i n variable og vi skriver $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Eksempel

Funksjonen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1 x_2 - 2x_2^2$ *er en funksjon i to variable.*

Funksjoner i flere variable

Definisjon og eksempler

Definisjon

En avbildning

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kalles en funksjon i n variable og vi skriver $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Eksempel

Funksjonen $T(x_1, x_2, x_3)$ *som til hvert punkt i rommet tilordner temperaturen i akkurat det punktet.*

Funksjoner i flere variable

Definisjon og eksempler

Definisjon

En avbildning

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

kalles en funksjon i n variable og vi skriver $y = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Merk at i tilfellene hvor vi har 2 eller 3 variable, så bruker vi ofte x, y eller x, y, z som navn på variablene.

Funksjoner i flere variable

Graf

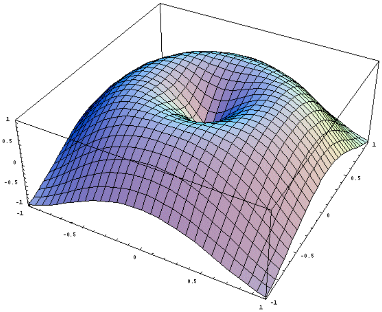
Grafen til en funksjon i to variable vil som oftest være en flate.

Funksjoner i flere variable

Graf

Grafen til en funksjon i to variable vil som oftest være en flate.

Eksempel



Grafen til funksjonen $z = \sin\left(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

Funksjoner i flere variable

Graf

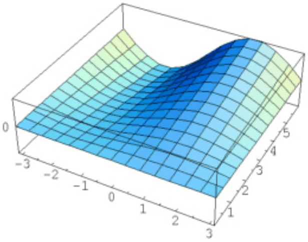
Et annet eksempel på grafen til en funksjon i to variable.

Funksjoner i flere variable

Graf

Et annet eksempel på grafen til en funksjon i to variable.

Eksempel



Grafen til funksjonen $z = \frac{y}{6} \cdot \sin x$.

Funksjoner i flere variable

Nivåmengder

En måte å framstille funksjoner i flere variable er ved å se på funksjonens nivåkurver. Nivåkurvene til en flate er kurver langs hvilke funksjonen er konstant.

Funksjoner i flere variable

Nivåmengder

En måte å framstille funksjoner i flere variable er ved å se på funksjonens nivåkurver. Nivåkurvene til en flate er kurver langs hvilke funksjonen er konstant.

Definisjon

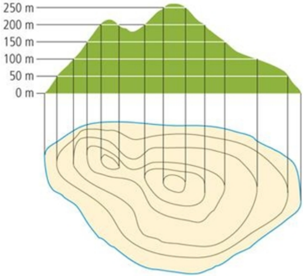
En **nivåmengde** *for en funksjon* $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(\underline{x})$ *for et reelt tall* c *er delmengden av* $\mathbf{R}^n$ *gitt ved* $\{(\underline{x}) \mid f(\underline{x}) = c\}$. *Kalles* **nivåkurver** *for* $n = 2$ *og* **nivåflater** *for* $n = 3$.

Funksjoner i flere variable

Nivåmengder

Eksempel

La (x, y) være et punkt på kartet og la $f(x, y)$ måle høyden over havet i dette punktet. Høydekurvene på kartet er nivåkurver for denne funksjonen.

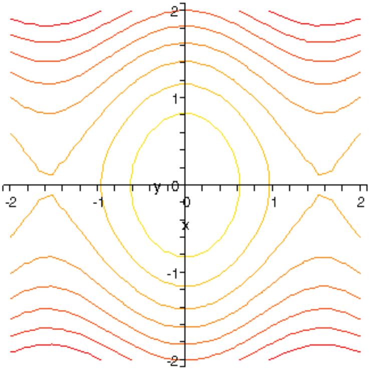


01.03 Høydekurver

Funksjoner i flere variable

Nivåmengder

Nivåkurver for $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$.



Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi kan generalisere begrepet derivasjon til funksjoner i flere variable.

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi kan generalisere begrepet derivasjon til funksjoner i flere variable.

Definisjon

*La $y = f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon i n variable. Den i-**te partiellderiverte** av f er gitt ved*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x, x_{i+1}, \dots) - f(\underline{x})}{\Delta x}$$

dvs. at vi lar alle x_j, $j \neq i$ opptre som konstanter og deriverer mhp x_i.

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(2x) - y^2$*. Da har vi*

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$*. Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(2x) - y^2$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Vi kan regne ut verdiene for noen punkter

	$(0,0)$	$(\frac{\pi}{4},0)$	$(0,1)$	$(\frac{\pi}{2},1)$	$(\frac{\pi}{4},\frac{3}{2})$
$-2\sin 2x$	0	-2	0	0	-2
$-2y$	0	0	-2	-2	-3

Eksempel (fortsetter)

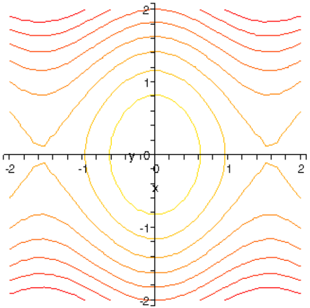
og sammenlikne talleksempene med nivåkurvene

	$(\frac{\pi}{4}, 0)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$
$(-2\sin 2x, -2y)$	$(-2, 0)$	$(0, -2)$	$(0, -2)$	$(-2, -3)$

Eksempel (fortsetter)

og sammenlikne talleksempene med nivåkurvene

	$(\frac{\pi}{4}, 0)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$
$(-2\sin 2x, -2y)$	$(-2, 0)$	$(0, -2)$	$(0, -2)$	$(-2, -3)$



Eksempel (fortsetter)

og sammenlikne talleksempene med nivåkurvene

	$(\frac{\pi}{4}, 0)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$
$(-2\sin 2x, -2y)$	$(-2, 0)$	$(0, -2)$	$(0, -2)$	$(-2, -3)$

Det kan se ut som om "retningen" til de partiellderiverte står normalt på nivåkurvene!

Vi kan forandre litt på eksemplet

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(2x) - y^2 + xy$*. Da har vi*

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi kan forandre litt på eksemplet

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(2x) - y^2 + xy$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x) + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$$

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi kan forandre litt på eksemplet

Eksempel

La $f(x, y) = \cos(2x) - y^2 + xy$*. Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x) + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$$

Nå kan vi f.eks. sette $x = 0$*, og se på funksjonen* $g(y) = f(0, y) = 1 - y^2$*. Den deriverte av denne funksjonen er* $g'(y) = -2y$ *som er det samme som vi får ved å sette inn* $x = 0$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$*.*

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi kan forandre litt på eksemplet

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(2x) - y^2 + xy$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin(2x) + y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$$

Nå kan vi f.eks. sette $x = 0$, *og se på funksjonen* $g(y) = f(0,y) = 1 - y^2$. *Den deriverte av denne funksjonen er* $g'(y) = -2y$ *som er det samme som vi får ved å sette inn* $x = 0$ *i* $\frac{\partial f}{\partial y}$. *Tilsvarende kan vi se på* $h(x) = f(x,1) = \cos(2x) - 1 + x$. *Den deriverte av denne er* $h'(x) = -2\sin(2x) + 1$, *som er det samme som den partiellderiverte av* f *med hensyn på* x, *innsatt* $y = 1$.

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Definisjon (alternativ)

Partiell derivasjon mhp en variabel er helt vanlig derivasjon hvor vi betrakter alle de andre variablene som konstanter.

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x, y) = \cos(xy)$*. Da har vi*

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(xy)$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy)\cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy)\cdot x$$

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x,y) = \cos(xy)$*. Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy) \cdot x$$

Nå kan vi fortsette å derivere, det gir oss 4 muligheter

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Eksempel

La $f(x, y) = \cos(xy)$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy) \cdot x$$

Nå kan vi fortsette å derivere, det gir oss 4 muligheter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot y^2 \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\
\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\
\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot x^2
\end{aligned}$$

Funksjoner i flere variable

Partiell derivasjon

Vi observerer at de to i midten er like.

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(xy)\cdot xy - \sin(xy)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(xy)\cdot xy - \sin(xy)$$

Tilfeldighet ? Eller har vi

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Definisjon

Vi skal bruke notasjonen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

og hvis $x_i = x_j = x$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Definisjon

Vi skal bruke notasjonen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

og hvis $x_i = x_j = x$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Teorem

Kryssderivasjon er uavhengig av rekkefølge:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Eksempel

La $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$. *Da har vi*

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Eksempel

La $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$*. Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Eksempel

La $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

Høyere ordens deriverte

Funksjoner i flere variable

Høyere ordens partielt deriverte

Eksempel

La $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$. *Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

Høyere ordens deriverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Onsdag 10. februar 2010

Forelesning

Vi fortsetter med analysen av funksjoner i flere variable, spesielt med fokus på hvordan vi kan finne maksimum og minimum. Det innebærer at vi må definere kritiske punkter. I tillegg skal vi se hvordan vi kan generalisere andre-derivert-testen for funksjoner i en variabel til funksjoner i to variable, gjennom det som kalles Hesse-matrisen. I andre time skal vi bruke teorien på et par differensiallikninger i flere variable, såkalt partielle differensiallikninger. Vi skal ikke løse disse likningene, det har vi ikke noe verktøy til, men vi skal se hvordan slike likninger kan brukes til å modellere fysiske fenomener.

Funksjoner i flere variable

- Max/min for funksjoner i flere variable
- Kritiske punkter/nødvendig betingelse
- Andre-derivert test
- Diffusjonslikning
- Bølgelikning

Funksjoner i flere variable

Lokale ekstremalpunkter

Vi starter med den lokale teorien, dvs. at vi analyserer funksjonenes lokale egenskaper. Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som måles i punkter og små omegner om dem. Vi skal gjøre teorien for funksjoner i to variable, men det er ikke noe forskjell å jobbe med flere variable.

Funksjoner i flere variable

Lokale ekstremalpunkter

Vi starter med den lokale teorien, dvs. at vi analyserer funksjonenes lokale egenskaper. Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som måles i punkter og små omegner om dem. Vi skal gjøre teorien for funksjoner i to variable, men det er ikke noe forskjell å jobbe med flere variable.

Definisjon

Det er to typer lokale ekstremalpunkter:

- $z = f(x, y)$ *har et* **lokalt minimum** *i* (a, b) *dersom* $f(a, b)$ *er mindre enn eller lik* $f(x, y)$ *for alle* (x, y) *i nærheten av* (a, b).
- $z = f(x, y)$ *har et* **lokalt maksimum** *i* (a, b) *dersom* $f(a, b)$ *er større enn eller lik* $f(x, y)$ *for alle* (x, y) *i nærheten av* (a, b).

Funksjoner i flere variable

Lokale ekstremalpunkter

Eksempel

Funksjonen $f(x,y) = x^2 + y^2$ *har et lokalt minimum i* $(0,0)$.
Funksjonen har ikke noen lokale maksimum.

Funksjoner i flere variable

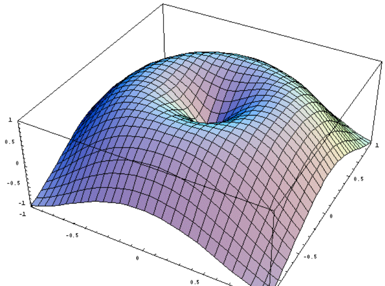
Lokale ekstremalpunkter

Eksempel

Funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ *har et lokalt minimum i* $(0, 0)$. *Funksjonen har ikke noen lokale maksimum.*

Eksempel

Funksjonen $z = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$ *har et lokalt minimum i* $(0, 0)$ *og lokale maksimum i* $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ *(pluss mange flere som vi ikke ser på figuren).*



Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter

Et helt sentralt begrep innen kalkulus er kritiske punkter:

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter

Et helt sentralt begrep innen kalkulus er kritiske punkter:

Definisjon

Et punkt $(x, y) = (a, b)$ *kalles et* **kritisk punkt** *dersom de partielt deriverte i punktet ikke eksisterer eller at alle er 0.*

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter

Eksempel

Vi kan derivere funksjonen $f(x,y) = \sin\left(\pi \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right)$ *og får*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\pi \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\pi \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{\pi y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Det er lett å se at begge de partiellderiverte er 0 når $x = y = 0$ *og når* $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$*, mens det ikke er fullt så enkelt å se at de blir 0 når* $x = y = 0$*. Men det gjør de og vi har kritiske punkter både for* $\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ *og for* $(x,y) = (0,0)$*.*

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter er de eneste kandidatene for ekstempunkter

Ofte er det sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men ikke alltid.

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter er de eneste kandidatene for ekstempunkter

Ofte er det sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men ikke alltid.

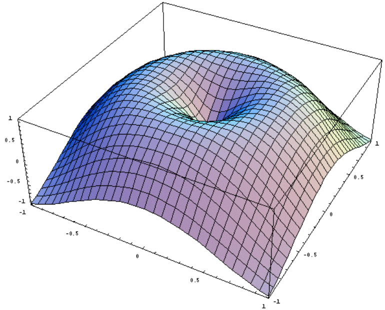
Teorem

Dersom $f(x, y)$ har et lokalt maksimum eller lokalt minimum i (a, b), så er (a, b) et kritisk punkt.

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter er de eneste kandidatene for ekstempunkter

Eksempel



Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter er de eneste kandidatene for ekstempunkter

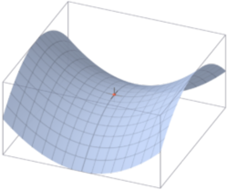
I motsetning til en-variabel-kalkulus kan vi her oppleve et mikset tilfelle:

Funksjoner i flere variable

Kritiske punkter er de eneste kandidatene for ekstempunkter

I motsetning til en-variabel-kalkulus kan vi her oppleve et mikset tilfelle:

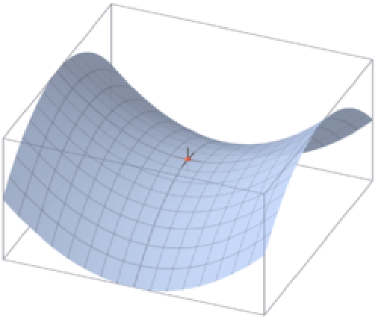
Eksempel



Dette er grafen til funksjonen $z = x^2 - y^2$. *Punktet* $(0, 0)$ *er et kritisk punkt. Det er et minimumspunkt dersom vi beveger oss gjennom det langs med* x*-aksen, og et maksimumspunkt langs med* y*-aksen.*

Funksjoner i flere variable

Sadelpunkt



Denne type punkter har få navnet **sadelpunkt**, oppkalt etter sadelen på en hesterygg.

Funksjoner i flere variable

Andre-derivert test

Vi har tre forskjellige typer kritiske punkter for en funksjon $f(x, y)$, lokale minimum, lokale maksimum og sadelpunkter. For å finne ut hva slags punkt vi har med å gjøre skal vi se på de andrederiverte til funksjonen i det aktuelle punktet. For et punkt (a, b) lar vi $H(a, b)$ betegne uttrykket

$$H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\Big)^2$$

Funksjoner i flere variable

Andre-derivert test

Teorem

Dersom $H(a, b) > 0$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$*, så er* (a, b) *et lokalt minimumspunkt.*

Dersom $H(a, b) > 0$ *og* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$*, så er* (a, b) *et lokalt maksimumspunkt.*

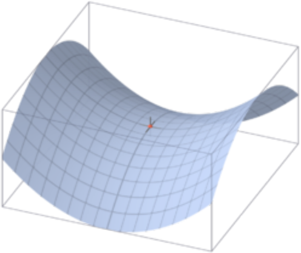
Dersom $H(a, b) < 0$*, så er* (a, b) *et sadelpunkt.*

Dersom $H(a, b) = 0$ *sier ikke denne testen oss noe.*

Funksjoner i flere variable

Eksempel

Vi betrakter funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$. Det eneste kritiske punktet er for $x = y = 0$.



Vi har $H = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$, som betyr at det kritiske punktet er et sadelpunkt.

Funksjoner i flere variable

Eksempel

Se på funksjonen $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy$. *Vi setter de partielt deriverte* $3x^2 + y$ *og* $-2y + x$ *til å være lik 0, noe som gir oss kritiske punkter* $(0,0)$ *og* $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$. *Vi regner ut*

$$H(x,y) = 6x \cdot (-2) - 1^2 = -12x - 1$$

Dette gir $H(0,0) = -1$ *og* $H(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = 1$. *Samtidig har vi* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = -1 < 0$. *Det betyr at* $(0,0)$ *er et sadelpunkt og* $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ *er et lokalt maksimum.*

Funksjoner i flere variable

Varmelikning

Eksempel

Varmelikningen er en differensiallikning som beskriver hvordan varme (energi) forplanter seg gjennom et legeme. I det 1-dimensjonale tilfellet beskriver den hvordan varme forplanter seg gjennom en tynn metallstav, når vi varmer opp den ene enden. Vi lar staven befinne seg på x*-aksen, med det ene endepunktet i origo og det andre i* $x = 1$*. Så varmer vi opp origo-enden og ser hva som skjer. Vi betegner med* $u(x, t)$ *temperaturen i punktet* x *på staven på tidspunktet* t *og* α *betegner den såkalte* **varmediffusiviteten** *Da har vi differensiallikningen*

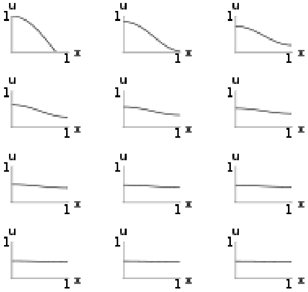
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Funksjoner i flere variable

Varmelikning

Eksempel (fortsetter)

Denne likningen er i prinsippet er svært vanskelig å løse, men vi kan illustrerer hva som skjer over tid:



Funksjoner i flere variable

Varmelikning

Eksempel (fortsetter)

Til å begynne med er den ene enden varm og den andre kald. Etter hvert vil varmen strømme fra den varme til den kalde enden slik likningen beskriver. Til slutt vil temeraturen i staven være jevnt fordelt over det hele.

Funksjoner i flere variable

Bølgelikning

Eksempel

Den 1-dimensjonale bølgelikningen er gitt ved

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der $u(x,t)$ *betegner bølgeutslaget i posisjonen* x *ved tiden* t*, og* c *er en konstant.*

Funksjoner i flere variable

Bølgelikning

Eksempel (fortsetter)

Likningen har mange forskjellige løsninger, avhengig av hva som er utgangspunktet. F.eks. ser vi at funksjonen $u(x,t) = \sin(x+ct)$ *oppfyller*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \sin(x+ct)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x+ct)$$

og derfor er en løsning. Denne funksjonen beskriver en harmonisk svingning som beveger seg i en retning.

Onsdag 17. februar 2010

Plenumsregning

Undersøk funksjonene med hensyn til deres kritiske punkter. Illustrer funksjonene ved å tegne et pasende utvalg nivåkurver.

Oppgave (1)

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

Oppgave (2)

$$f(x,y) = x^2y^2$$

Oppgave (3)

$$f(x,y) = 1 - x^2$$

Onsdag 17. februar 2010

Plenumsregning

Oppgave (4)

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Oppgave (5)

$$f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

Oppgave (6)

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$