MAT 1012

Våren 2010

UNIVERSITETET
I OSLO

Mandag 22. februar 2010

Forelesning

Vi begynner med litt repetisjon fra forrige gang, med å sjekke om et vektorfelt er konservativt og dersom svaret er ja, regne ut potensialfunksjonen. Videre skal vi se på en variant av dette, hvor vi tar utgangspunkt i et vektorfelt og prøver å jobbe oss fram til integralkurver for vektorfeltet. Integralkurver er kurver som "følger" feltet. Generelt er det nesten umulig å løse slike problemer, men vi skal hovedsakelig se på eksempler der vi kan finne en løsning, som illustrasjoner på anvendelser av gradientkonstruksjonen.

Vektoranalyse

- Mer om potensial og gradienter
- Geometrisk betydning av potensialer
- Praktiske eksempler på potensialer

Funksjoner i flere variable

Potensial

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for $\mathbf{F}$.

Funksjoner i flere variable

Potensial

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for $\mathbf{F}$.
Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy) = -6x \qquad \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y^2) = -6x$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $f(x, y)$ *slik at* $\mathbf{F} = \nabla f$.

Funksjoner i flere variable

Potensial

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for $\mathbf{F}$.
Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2$$

Integrerer vi $3x^2 - 6xy$ *med hensyn på* x *får vi* $x^3 - 3x^2y + g(y)$, *der* $g(y)$ *er en funksjon kun i* y *og som går på 0 når vi deriverer med hensyn på* x. *Det enkleste er nå å derivere denne funksjonen med hensyn på* y *og sammenlikne med uttrykket over.*

Funksjoner i flere variable

Potensial

Eksempel

Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for $\mathbf{F}$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2y + g(y))) = -3x^2 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $-3x^2 + 3y^2$ *slutter vi at* $g'(y) = y^3 + K$ *hvor* K *er en integrasjonskonstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved*

$$f(x, y) = y^3 - 3x^2y + y^3 + K$$

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Vi skal se på en variant av potensialproblemet. Tidligere har vi sett på retningsdiagram og brukt disse til å konstruere løsninger til differensiallikninger. Vi skal se på denne problemstillingen fra en litt annen synsvinkel.
I planet ser definisjonen av et vektorfelt slik ut

Definisjon

La $f_1(x, y)$ og $f_2(x, y)$ være funksjoner i to variable definert på et område R i xy-planet. Et **plant vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$** *er gitt ved*

$$\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Retningsdiagrammet til en funksjon $y = f(x)$ er et eksempel på et vektorfelt i planet. Vi kan sette opp et uttrykk for tangentene til grafen til f ved vektorene $(1, f'(x))$. Dette gir oss et vektorfelt ved å sette $f_1(x, y) = 1$ og $f_2(x, y) = f'(x))$. Nå vet vi at funksjonene $y = f(x) + C$ gir oss alle løsningskurvene til dette vektorfeltet. Dette kan vi forsøke å generalisere.

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Vi tenker oss at vi har gitt et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Denne funksjonen tilordner til et hvert punkt i planet en vektor. Et naturlig spørsmål vi kan stille er om det finnes en plan kurve som følger dette vektorfeltet, altså om det finnes det vi har kalt en løsningskurve eller integralkurve.

Definisjon

La $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ *være et vektorfelt i planet. Vi sier at en funksjon* $y = g(x)$ *er en* **integralkurve** *for vektorfeltet dersom* $(1, g'(x))$ *er parallell med* $\mathbf{F}(x, y)$ *i alle punkter på grafen til* $y = g(x)$*.*

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Dette betyr spesielt at i alle punkter på grafen til $y = g(x)$ må vi ha at $g'(x)) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$. Dette er generelt vanskelig å få til, så vi må begrense problemet litt for å komme noe videre. Men først et par eksempler:

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Dette betyr spesielt at i alle punkter på grafen til $y = g(x)$ må vi ha at $g'(x)) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$. Dette er generelt vanskelig å få til, så vi må begrense problemet litt for å komme noe videre. Men først et par eksempler:

Eksempel

Betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$. *Da vil funksjonen* $y = g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ *gi oss en integralkurve for alle valg av* R. *Det følger av at*

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Dette betyr spesielt at i alle punkter på grafen til $y = g(x)$ må vi ha at $g'(x)) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}$. Dette er generelt vanskelig å få til, så vi må begrense problemet litt for å komme noe videre. Men først et par eksempler:

Eksempel

Dersom vektorfeltet er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$ *ser vi at funksjonen* $y = g(x) = \frac{C}{x}$ *gir oss en integralkurve for alle valg av konstanten* C. *Det følger siden*

$$(1, g'(x)) = (1, -\frac{C}{x^2}) = -\frac{1}{x}(-x, \frac{C}{x}) = -\frac{1}{x}(-x, y)$$

som er parallell med $\mathbf{F}(x, y)$.

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Vi legger inn et lite mellomspill om vektorer her.

Lemma

Gitt en vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ *i planet. Da vil vektoren* $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$ *stå normalt på* $\mathbf{v}$*, dvs.* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$.

Eksempel

Vektorene $\mathbf{v} = (1, 2)$ *og* $\mathbf{v}^\perp = (-2, 1)$ *står normalt på hverandre siden* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$.

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Eksempel

Vi skal først se på problemet i motsatt retning. Vi tenker oss da at vi har gitt en kurve, f.eks. $g(x, y) = x^2y + y + 1 = 0$*. Gradienten til kurven peker i hvert punkt på kurven i en retning som står vinkelrett på tangenten til kurven. I vårt tilfelle er gradienten gitt ved*

$$\nabla g(x, y) = (2xy, x^2 + 1)$$

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Eksempel (fortsetter)

Nå er vi mer interessert i vektorer langs med kurven, mer enn vektorer på tvers av kurven. Det betyr at for å skrive opp et pildiagram som følger den gitte kurven, så må vi se på vektorene

$$\nabla g(x, y)^{\perp} = (x^2 + 1, -2xy)$$

Tar vi utgangspunkt i dette vektorfeltet, så blir spørsmålet det motsatte, betrakt et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet. Kan vi finne en funksjon slik at vektorfeltet er gradienten til denne funksjonen, altså det vi har kalt et potenisal? I vårt tilfelle kan vi det (pr. konstruksjon) og nivåkurvene til denne funksjonen gir oss presis løsningskurver til vektorfeltet $\nabla g(x, y)^{\perp}$.

Funksjoner i flere variable

Eksempel

Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som følger dette vektorfeltet, dvs. som i hvert punkt på kurven har tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet $(1,0)$.

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Eksempel

Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$$

Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^{\perp}(x,y) = (x,y)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$*. Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet* $(1,0)$ *så er det nivåkurven til* f *gitt ved* $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}$ *vi er ute etter, mao en sirkel i planet.*

Eksempel

Et eksempel til. Nå har vi gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (\frac{1}{y}, -2x)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som som i hvert punkt har en tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet $(0, 1)$.

Funksjoner i flere variable

Eksempel

Et eksempel til. Nå har vi gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (\frac{1}{y}, -2x)$$

Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^{\perp}(x, y) = (2x, \frac{1}{y})$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen $f(x, y) = x^2 + \ln(y)$. *Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet* $(0, 1)$ *så er det nivåkurven til* f *gitt ved* $f(x, y) = x^2 + \ln(y) = 0$ *vi er ute etter, mao* $\ln(y) = -x^2$ *eller* $y = e^{-x^2}$.

Funksjoner i flere variable

Vektorfelt

Eksempel

Vi skal se på et annet eksempel der vi har et potensial. Tyngdefeltet på jordoverflaten er et vektorfelt, gitt av et potensial. Potensialet er gitt ved

$$f(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

der vi har lagt origo i jordas sentrum. Gradienten til dette feltet er

$$\nabla f = \left(-\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Cy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Cz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Onsdag 24. februar 2010

Forelesning

Gradienten er den naturlige deriverte til en funksjon i flere variable. Hva med den deriverte av et vektorfelt? Siden derivasjon er et uttrykk for endring, skal derivasjon av et vektorfelt gi oss et uttrykk for endring av vektorfeltet. Dette leder oss til begrepet sirkulasjon (curl), En viktig observasjon er at når vi definerer derivasjon på denne måten forsvinner alle dobbel-deriverte, f.eks. vil et potensial ikke ha noen sirkulasjon.

Vektoranalyse

- Definisjon og tolkning av begrepet sirkulasjon for plane vektorfelt
- Sirkulasjon for romlige vektorfelt

Vi har tidligere sett at når vi har gitt et vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$ kan vi bruke en derivert-test for å avgjøre om feltet er konservativt, dvs. om det kan skrives som en gradient av en funksjon i flere variable. Testen sammenlikner de partiellderiverte

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial P}{\partial y}$$

og konklusjonen er at likhet er en nødvendig betingelse for at feltet er konservativt. Det betyr at differansen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

har en lakmus-rolle i å avgjøre om et felt er konservativt.

Uttrykket er så viktig at det har fått et eget navn, vi kaller det **sirkulasjonen** til feltet

Definisjon

La $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ *være et plant vektorfelt. Vi definerer* **sirkulasjonen** *til* $\mathbf{F}$, $curl(\mathbf{F})$ *ved*

$$curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vi skal etter hvert se på hvorfor vi kaller dette for sirkulasjon.

Vektoranalyse

Sirkulasjon

Vi skal regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Vi skal regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Eksempel (1)

La $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ *være et radialt vektorfelt. Da er sirkulasjonen til* $\mathbf{F}$

$$curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x = 0$$

så feltet er konservativt, gitt ved $\mathbf{F} = \nabla f$, *der* $f(x, y) = x^2 + y^2 + C$.

Vi skal regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Eksempel (2)

La $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ *være et sirkulært vektorfelt. Da er sirkulasjonen til* $\mathbf{F}$

$$curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2$$

dvs. at sirkulasjonen er konstant i hele planet.

Vi skal regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Eksempel (3)

Et konstant vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (a, b)$ *har selvfølgelig ikke noen sirkulasjon, siden*

$$curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x} a - \frac{\partial}{\partial y} b = 0$$

Feltet er gradienten til funksjonen $f(x, y) = ax + by + C$, *dvs. en lineær funksjon.*

Vi skal regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Eksempel (4)

Selv et vektorfelt der alle pilene peker samme vei kan ha sirkulasjon. La $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ *være et vektorfelt der alle pilene peker i* x*-retning. Sirkulasjonen til* $\mathbf{F}$ *er gitt ved*

$$curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}y = -1$$

Grunnen til at vi får en ikke-null sirkulasjon i dette eksempelet er at størrelsen på feltet øker når vi beveger oss ut fra x*-aksen.*

Vektoranalyse

Sirkulasjon

En måte å visualisere sirkulasjon er som følger. Vi tenker oss at vi fyller hele planet med mennesker som beveger seg med vektorfeltet. Det betyr at de i et hvert punkt beveger seg i den retningen som feltet foreskriver og med en hastighet gitt ved lengden av vektoren i punktet. For eksempel vil feltet $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ i punktet (a, b) ha retning $(P(a, b), Q(a, b))$ og størrelse $\sqrt{P(a, b)^2 + Q(a, b)^2}$. For å måle sirkulasjonen i feltet i punktet (a, b) plasserer vi en stolpe i punktet. Stolpen må bli værende i punktet, men må kunne sirkulere fritt om sin egen akse. Når folkemassen beveger seg med feltet vil sirkulasjonen i stolpen presis beskrive sirkulasjonen i feltet.

Vektoranalyse

Sirkulasjon

I det ene eksempelet over så vi at feltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ har sirkulasjon $curl(\mathbf{F}) = -1$ selv om hele køen går i samme retning, langs x-aksen. Imidlertid går de fortere og fortere jo lenger ut fra x-aksen vi kommer. Det betyr at en stolpe som er passert i folkemassen bliir skubbet mer på den ene enn den andre siden, og derfor vil rotere.

Vektoranalyse

Sirkulasjon

Det er den samme effekten i eksemplet med det sirkulære vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Det er altså ikke det at feltet er sirkulært som skaper sirkulasjonen, men det er det at størrelsen på feltet øker når vi beveger oss på tvers av feltretningene. I det radiale feltet $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ vil også størrelsen på feltet øke når vi beveger oss vekk fra origo, men feltet er konstant i størrelse på tvers av feltretningene, og da blir sirkulasjonen borte.

Vi kan gi en romlig versjon av begrepet sirkulasjon. I det tilfellet vil sirkulasjonen være et nytt vektorfelt.

Definisjon

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ *være et vektorfelt i rommet. Vi definerer sirkulasjonen til* $\mathbf{F}$, $curl(\mathbf{F})$ *ved*

$$curl(\mathbf{F}) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Vektoranalyse

Sirkulasjon

Betrakt nå et vektorfelt i planet, gitt ved at $R(x, y, z) = 0$ og slik at P og Q er konstante mht. z. Dette er det nærmeste vi kommer en romlig versjon av et plant vektorfelt. Det gir

$$curl(\mathbf{F}) = (0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$$

Mao. er sirkulasjonen til et plant vektorfelt gitt ved en retning ut av planet og i den retningen er størrelsen på feltet lik med definisjonen av sirkulasjon for et plant vektorfelt. De to definisjonene er dermed konsistente, men vi skal i våre eksempler holde oss til den plane versjonen.

Eksempel

Vi skal regne ut sirkulasjonen til retningsdiagrammet til funksjonen $y = g(x)$. Retningsdiagrammet er i hvert punkt gitt som et vektorfelt $\mathbf{G}(x, y) = (1, g'(x))$. Sirkulasjonen blir da

$$curl(\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x} g'(x) - \frac{\partial}{\partial y} 1 = g''(x)$$

Det betyr at sirkulasjonen i dette tilfellet måles av samme uttrykk som måler funksjonenes krumning.

Onsdag 3. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (1)

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2, 2xy + 2)$.

a) *Vis at vektorfeltet* $\mathbf{F}^{\perp}$ *har et potensial.*

b) *Finn et potensial for* $\mathbf{F}^{\perp}$.

c) *Finn en kurve som går gjennom punktet* $(1, 1)$ *og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet* $\mathbf{F}$.

Onsdag 3. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (2)

Beregn sirkulajonen til vektrofeltene og dens største verdi.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y, \cos x)$

Onsdag 3. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (3)

Vi har gitt en nivåkurve $f(x,y) = C$. *Tangentvektorfeltet til denne kurven er gitt ved* $\mathbf{T}(x,y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. *Vis at sirkulasjonen til tangentfeltet er gitt ved* $f_{xx} + f_{yy}$, *hvor vi bruker notasjonen* $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$, *osv.*

Onsdag 3. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (3)

Vi har gitt en nivåkurve $f(x, y) = C$. Tangentvektorfeltet til denne kurven er gitt ved $\mathbf{T}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Vis at sirkulasjonen til tangentfeltet er gitt ved $f_{xx} + f_{yy}$, hvor vi bruker notasjonen $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$, osv.

Oppgave (4)

Regn ut $f_{xx} + f_{yy}$ for funksjonene

a) $f(x, y) = 2x + 3y - 1$

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$

c) $f(x, y) = e^{xy}$