MAT 1012

Våren 2010

UNIVERSITETET I OSLO

Mandag 1. mars 2010

Forelesning

Fundamentalteoremet sier at integrasjon og derivasjon er motsatte operasjoner. Vi har de siste ukene sett hvordan vi på ulike måter kan derivere funksjoner i flere variable. Nå er turen kommet til den motsatte operasjonen, vi skal integrere funksjoner i flere variable.

Multippel integrasjon

- Multippel integrasjon over rektangler
- Multippel integrasjpon over generelle plane områder
- Areal/tyngdepunkt

Multippel integrasjon

Over rektangler

Vi skal begynne med å integrere funksjoner i to variable over rektangler i planet. Ved partiell derivasjon deriverte vi mhp en variabel og betraktet alle andre variable som konstanter. Multippel integrasjon baserer seg på nøyaktig samme prinsipp. Vi illustrerer dette med eksempler.

Multippel integrasjon

Over rektangler

Eksempel

Vi skal regne ut integralet av funksjonen $f(x, y) = xy + 1$ *over rektangelet* $Q : [0, 1] \times [-1, 1]$ *i* (x, y)*-planet.*

Eksempel

Vi skal regne ut integralet av funksjonen $f(x,y) = xy + 1$ *over rektangelet* $Q : [0,1] \times [-1,1]$ *i* (x,y)*-planet.*
Når vi skriver

$$\iint_Q xy + 1\, dx\, dy$$

så mener vi

$$\iint_Q xy + 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^1 xy + 1\, dx \Big)\, dy$$

Eksempel

Vi skal regne ut integralet av funksjonen $f(x,y) = xy + 1$ over rektangelet $Q : [0,1] \times [-1,1]$ i (x,y)-planet.

$$\iint_Q xy + 1\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^1 xy + 1\, dx \Big)\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} [\frac{1}{2}x^2 y + x]_0^1\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}y + 1\, dy$$

$$= [\frac{1}{4}y^2 + y]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} - (-1) = 2$$

Eksempel

Vi kan regne ut det samme integralet, men i motsatt rekkefølge:

$$\begin{aligned}\iint_Q xy + 1\,dx\,dy &= \int_0^1 \Big(\int_{-1}^1 xy + 1\,dy\Big)\,dx \\ &= \int_0^1 [\frac{1}{2}xy^2 + y]_{-1}^1\,dx \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + 1)\,dx \\ &= [2x]_0^1 \\ &= 2 - 0 = 2\end{aligned}$$

Multippel integrasjon

Over rektangler

Det er ikke noen tilfeldighet at disse to integralene er like. Det er et generelt faktum.

Teorem

En funksjon $f(x, y)$ er definert over et rektangel $Q : [a, b] \times [c, d]$ i planet. Da har vi

$$\iint_Q f \, dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

Multippel integrasjon

Over rektangler

Eksempel

Funksjonen $f(x,y) = x\sin y - ye^x$ *er definert over rektangelet* $[-1,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$. *Vi skal beregne integralet* $\iint_Q f\,dA$.

Multippel integrasjon

Over rektangler

Eksempel

Funksjonen $f(x, y) = x \sin y - ye^x$ er definert over rektangelet $[-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Vi skal beregne integralet $\iint_Q f\, dA$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\Big(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin y - ye^x\, dy\Big)\, dx &= \int_{-1}^{1}\Big[-x\cos y - \frac{1}{2}y^2e^x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1}\Big(-\frac{\pi^2}{8}e^x + x\Big)\, dx \\
&= \Big[-\frac{\pi^2}{8}e^x + \frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{\pi^2}{8}e + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8}e^{-1} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{1}{e} - e\Big)
\end{aligned}$$

Multippel integrasjon

Over rektangler

Eksempel

Vi skal regne ut volumet under grafen til $f(x, y) = x^2 + y^2$ *over rektangelet* $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Multippel integrasjon

Over rektangler

Eksempel

Vi skal regne ut volumet under grafen til $f(x,y) = x^2 + y^2$ *over rektangelet* $[-1,1] \times [-1,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} x^2 + y^2 \, dy\right) dx &= \int_{-1}^{1} [x^2 y + \frac{1}{3}y^3]_{-1}^{1} \, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x^2 + \frac{1}{3} - (-x^2) - (-\frac{1}{3})) \, dx \\
&= [\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x]_{-1}^{1} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}) \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, nemlig områder som ligger mellom to grafer. Vi begynner med de områdene vi kaller type I. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, nemlig områder som ligger mellom to grafer. Vi begynner med de områdene vi kaller type I. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Definisjon

Vi definerer integralet av funksjonen $f(x, y)$ over området D, gitt over, til å være

$$\iint_D f\, dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Eksempel

La D være området gitt ved ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ *og* $0 \leq y \leq x^2$.
Vi skal beregne dobbeltintegralet

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Eksempel

La D være området gitt ved ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ *og* $0 \leq y \leq x^2$.
I dette eksemplet er $g(x) = 0$ *og* $h(x) = x^2$. *Det gir*

$$\begin{aligned}
\iint_D xy\, dx\, dy &= \int_1^2 \Big(\int_0^{x^2} xy\, dy \Big) dx \\
&= \int_1^2 [\frac{1}{2} xy^2]_0^{x^2})dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2} x^5\, dx \\
&= [\frac{1}{12} x^6]_1^2 = \frac{63}{12}
\end{aligned}$$

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Områder (integraler) av type II er avgrenset av kurver på formen $x = g(y)$, altså grafer der x-aksen og y-aksen har byttet roller i forhold til type I.

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d,\, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Formelen for dobbeltintegralet av en funksjon $f(x, y)$ over et slikt område er gitt ved

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \Big(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx \Big) dy$$

Det er viktig å merke seg at i disse tilfellene er det ikke nødvendigvis mulig å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, det kan vi kun gjøre dersom området både er av type I og av type II.

Multippel integrasjon

Generelle plane områder

Eksempel

Vi skal beregne dobbeltintegralet $\iint_D y^2 \sin xy \, dx \, dy$ *der* D *er området mellom* $x = y$ *og* $x = 0$ *og der* $y \in [0, a]$. *Vi regner ut*

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^a \Big(\int_0^y y^2 \sin xy \, dx\Big) dy \\
&= -\int_0^a [y^2 \cdot \frac{1}{y} \cos xy]_0^y \, dy \\
&= -\int_0^a y \cos y^2 - y \, dy \\
&= -[\frac{1}{2} \sin y^2 - \frac{1}{2} y^2]_0^a \\
&= \frac{a^2 - \sin a^2}{2}
\end{aligned}$$

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Vi kan bruke dobbeltintegrasjon til å finne arealet til et område i xy-planet. Det gjør vi ved å betrakte konstantfunksjonen $f(x, y) = 1$ over det området vi skal finne arealet av. Det legemet vi da beregner volumet av vil være en sylindrisk boks med grunnflate lik området i xy-planet og høyde 1, og arealet får nøyaktig samme verdi som volumet. Vi kan se på et eksempel.

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Eksempel

Vi skal finne arealet av området i xy-planet som ligger inni parabelen $y = x^2$, under $y = 1$ og mellom $x = -1$ og $x = 1$. Vi beregner dobbeltintegralet

$$A = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^{1} [y]_{x^2}^{1} \, dx = \int_{-1}^{1} 1 - x^2 \, dx$$

$$= [x - \frac{1}{3}x^3]_{-1}^{1} = (1 - \frac{1}{3}) - (-1 - \frac{1}{3}(-1)^3)2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Vi kan bruke en tilsvarende teknikk for å finne tyngdepunktet av et areal i planet. Tyngdepunktet av et område D i planet er det punktet som ligger mest midt i området. Det betyr at dersom vi kutter ut området på en papplate og setter platen på toppen av en passerspiss, så vil platen balansere dersom vi har satt passerspissen i tyngdepunktet. Man kan vise at vi finner koordinatene til dette punktet, som vi kaller $(\bar{x}, \bar{y})$ ved formelene

$$\bar{x}A = \iint_D x \, dx \, dy \qquad \bar{y}A = \iint_D y \, dx \, dy$$

der A er arealet av området D.

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Eksempel

Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h.
Vi legger de tre hjørnene i punktene $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$ *og* $(0, h)$.
Siden trekanten stikker like mye ut på hver side av y-aksen vil et enkelt symmetriargument gi at $\overline{x} = 0$.

Eksempel

Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h.
For å finne y-koordinaten deler vi trekanten i to og betrakter den delen som ligger i første kvadrant. Vi ser at y-koordinaten til tyngdepunktet er den samme for denne halve trekanten som for hele trekanten.

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Eksempel

Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h.
Det betyr at området vi skal integrere over er gitt ved at $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ *og* $0 \leq y \leq h - \frac{2h}{a}x$. *Den siste ulikheten får vi fra uttrykket som gir likningen til hypotenusen i den halve trekanten, nemlig* $y = h - \frac{2h}{a}x$. *Arealet av denne trekanten vet vi er* $A = \frac{ah}{2}$ *og formelen over gir oss*

Multippel integrasjon

Areal og tyngdepunkt

Eksempel

Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h.

$$
\begin{aligned}
\overline{y} \cdot \frac{ah}{2} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{h-\frac{2h}{a}x} y\,dy\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} [\frac{y^2}{2}]_0^{h-\frac{2h}{a}x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{a}{2}} h^2 - \frac{4h^2}{a}x + \frac{4h^2}{a^2}x^2\,dx = [h^2x - \frac{2h^2}{a}x^2 + \frac{4h^2}{3a^2}x^3]_0^{\frac{a}{2}} \\
&= h^2\frac{a}{2} - \frac{2h^2}{a}(\frac{a}{2})^2 + \frac{4h^2}{3a^2}(\frac{a}{2})^3 = ah^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}) = ah^2\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Deler vi ut får vi at $\overline{y} = \frac{1}{3}h$ *som er y-koordinaten til tyngdepunktet.*

Onsdag 3. mars 2010

Forelesning

I denne forelesningen skal vi se på kurver i planet og hvordan vi kan inegrere funksjoner som er definert over slike kurver. Når vi integrerer langs x-aksen tenker vi på integralet som en uendelig sum av arealene til uendelig mange uendelig smale rektangler med funksjonsverdien som høyde og bredde dx. Vi gjør det samme langs en kurve, men nå erstatter vi dx med et uendelig lite segment ds langs kurven. Integralet blir i prinsippet det samme, men for å få det til kommer vi til å trenge inngående kunnskap om disse små segmnetene.

Kurveintegraler

- Parametriserte kurver
- Differensialer på kurver, ds
- Generelle kurveintegraler

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Vi har til nå beskrevet kurver på to forskjellige måter. Den ene er som grafen til en funksjon $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, og den andre er som løsningene av en likning, $x^2 + y^2 = 1$. Disse to beskrivelsene gir oss (deler av) en sirkel. En tredje måte å gjøre dette er ved å parametrisere kurven. I vårt tilfelle setter vi

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

eller $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Definisjon

Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

kalles en **parametrisert kurve***.*

Eksempel

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Definisjon

Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

kalles en **parametrisert kurve***.*

Eksempel

1. Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ *beskriver en sirkel med radius* R*.*

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Definisjon

Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

kalles en **parametrisert kurve**.

Eksempel

2. En parabel kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$.

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Definisjon

Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

kalles en **parametrisert kurve***.*

Eksempel

3. Generelt kan vi parametrisere grafen til en funksjon $y = f(x)$ *ved* $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$*.*

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Definisjon

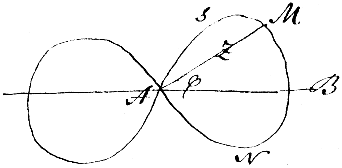
Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

kalles en **parametrisert kurve**.

Eksempel

4. Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + t^4}, \sqrt{t^2 - t^4})$ *beskriver en* **lemniscate**.



Vi kan regne ut **tangentvektoren** til den parametriserte kurven i et punkt ved å derivere de to definerende funksjonene;

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t))$$

og **normalvektoren**

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-g'(t), f'(t))$$

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Eksempel

Vi har gitt en sirkel ved $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$*. Det gir tangentvektor* $\mathbf{T}(t) = (-R\sin t, R\cos t)$ *og normalvektor* $\mathbf{N}(t) = (-R\cos t, -R\sin t)$*. I dett tilfelle vil posisjonsvektoren* $\mathbf{r}(t)$ *og normalvektoren* $\mathbf{N}(t)$ *peke i samme (motsatt) retning.*

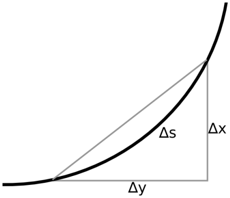
Eksempel

Parablen kan beskrives ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ *og vi har tangentvektor* $\mathbf{T}(t) = (1, 2t)$ *og normalvektor* $\mathbf{N}(t) = (-2t, 1)$*.*

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

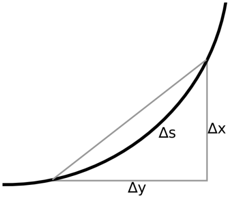
Det er mulig å beregne buelengden til en parametrisert kurve.



Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Det er mulig å beregne buelengden til en parametrisert kurve.



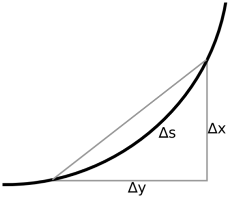
Ved Pythagoras teorem får vi at $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$. Tar vi kvadratroten og deler vi på Δt får vi

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}$$

Kurveintegraler

Parametriserte kurver

Det er mulig å beregne buelengden til en parametrisert kurve.



Når vi går til grensen $\Delta t \to 0$ får vi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

som vi kan skrive

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Kurveintegraler

Buelengde

På samme måte som vi har tolket dx som et uendelig lite linjestykke langs med x-aksen, kan vi tolke ds som et uendelig lite linjestykke langs med kurven. Det betyr at vi kan regne ut lengden av kurven.

Definisjon

Buelengden *B til kurven $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$ mellom $t = a$ og $t = b$ er gitt ved integralet*

$$B = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Kurveintegraler

Buelengde

Eksempel

Buelengden til kurven $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ *mellom* $t = 0$ *og* $t = 2\pi$ *er gitt ved integralet*

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} R\, dt = [R\, t]_0^{2\pi} = 2\pi R \end{aligned}$$

Eksempel

Buelengden til kurven $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$ *mellom* $t = 0$ *og* $t = 3$ *er gitt ved integralet*

$$\begin{aligned} B &= \int_0^3 \sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}})^2}\, dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1 + t}\, dt \\ &= \frac{2}{3}[(1+t)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Kurveintegraler

Kurveintegral

Kombinerer vi det vi har sagt om buelende med vår viten om integraler er vi nå i stand til å definere mer generelle kurveintegral.

Definisjon

Kurveintegralet *av funksjonen* $f(x,y)$ *langs med kurven* $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ *mellom* $t = a$ *og* $t = b$ *er gitt ved*

$$\int_a^b f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Eksempel

Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x,y) = \frac{y}{x}$ *langs parabelen* P*, gitt ved* $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ *mellom* $t = 0$ *og* $t = \sqrt{3}$*.*
Merk at langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t, \frac{1}{2}t^2) = \frac{t^2}{2t} = \frac{1}{2}t$$

og integralet blir

$$\int_P f\, ds = \int_0^{\sqrt{3}} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(1)^2 + (t)^2} dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{1 + t^2} dt = \frac{1}{6}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{7}{6}$$

Eksempel

Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x, y) = -y$ *langs sirkelen* C*, gitt ved* $\mathbf{r}(t) = (R\cos(t), R\sin t)$ *fra* $t = 0$ *til* $t = 2\pi$*. Langs denne kurven ser funksjonen ut som*

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(R\cos(t), R\sin t) = -R\sin t$$

Det gir integral

$$\int_C f\,ds = \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} R\sin t\,dt = -R[-\cos t]_0^{2\pi} = 0$$

Integralet i det siste eksemplet beregnes rundt en hel sirkel slik at de to endepunktene faktisk er samme punkt i planet, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$. Slike integral har et eget (meget illustrerende) symbol, vi skriver

$$\oint_C f \, ds$$

som betyr at vi integrerer langs en **lukket kurve** C.

Onsdag 10. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (1)

Finn tyngdepunktet til området i xy-planet som ligger mellom grafen til $y = 1 - x^2$ *og* $-1 \leq x \leq 1$ *på x-aksen.*

Onsdag 10. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (1)

Finn tyngdepunktet til området i xy-planet som ligger mellom grafen til $y = 1 - x^2$ *og* $-1 \leq x \leq 1$ *på x-aksen.*

Oppgave (2)

a) *Finn arealet til området i xy-planet som ligger mellom grafene til* $f(x) = x^2$ *og* $g(x) = x^3$*, og for* $0 \leq x \leq 1$.

b) *Finn tyngdepunktet til området beskrevet i oppg. a).*

Onsdag 10. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (3)

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

Onsdag 10. mars 2010

Plenumsregning

Oppgave (3)

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

Oppgave (4)

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$, $0 \leq t \leq 5$