UNIVERSITETET
I OSLO

Arne B. Sletsjøe

Oppgaver, MAT 1012

1 En-variabel kalkulus

1.1

I de følgende oppgavene, i) finn alle kritiske punkter til $f(x)$, ii) beskriv monotoniegenskapene til funksjonene ved å se på fortegnet til $f'(x)$, iii) finn lokale ekstremalpunkter, iv) bestem de intervallene der funksjonene krummer, henholdsvis opp og ned, v) finn funksjonenes vendepunkter

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$

c) $f(x) = 2 + (x-1)^4$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 2x + \cos x$

1.2

I de følgende oppgavene, i) finn alle kritiske punkter til $f(x)$, ii) beskriv monotoniegenskapene til funksjonene ved å se på fortegnet til $f'(x)$, iii) finn lokale ekstremalpunkter, iv) bestem de intervallene der funksjonene krummer, henholdsvis opp og ned, v) finn funksjonenes vendepunkter, vi) finn globale maks og min

a) $f(x) = x^3 - 4x$, $x \in [-1, 2]$

b) $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x^2-9)}$, $x \in [0, 2]$

c) $f(x) = x - \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$

1.3

La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = x^3 - x \qquad x \in [-1, 3]$$

a) Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for f.

b) Finn eventuelle vendepunkter for f og undersøk hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned.

1.4

La funksjonen f være definert for alle relle tall x ved

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$$

hvor a er en konstant.

a) Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for f.

b) Finn eventuelle vendepunkter for f og undersøk hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned.

1.5

Funksjonen $f(t)$ er gitt ved

$$f(t) = t \ln t - t, \qquad \frac{1}{4} \leq t \leq 3$$

Avgjør hvor funksjonen f vokser og hvor den avtar og finn ut hvor i definisjonsområdet den antar sin største/minste verdi.

2 Bestemte integral I

2.1

Regn ut de bestemte integralene.

a) $\int_0^3 x^2\, dx$

b) $\int_{-3}^3 x^2\, dx$

c) $\int_0^2 4x^3\, dx$

d) $\int_{-2}^2 4x^3\, dx$

2.2

Regn ut de bestemte integralene.

a) $\int_{-1}^2 (t+1)\, dt$

b) $\int_{-1}^0 (x+1)^2\, dx$

c) $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\, dx$

d) $\int_0^\pi (x + \sin x) dx$

2.3

Regn ut de bestemte integralene

a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x}(\ln x)\, dx$

b) $\int_1^4 \frac{1}{x} + \sqrt{x}\, dx$

c) $\int_0^{2\pi} \sin t \, \sin(\omega t)\, dt$

d) $\int_0^1 xe^{3x^2}\, dx$

e) $\int_0^1 xe^{2x}\, dx$

2.4

Finn arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen og den rette linja ($x = a$).

a) $f(x) = 5x$ og $x = 1$

b) $f(x) = 3x^2$ og $x = 1$

c) $f(x) = \sin x$ og $x = \frac{\pi}{2}$

2.5

Finn arealet avgrenset av grafen til f, x-aksen og de to rette linjene.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ og $x = 1$, $x = 4$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ og $x = 1$, $x = 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ og $x = 1$, $x = 3$

2.6

Regn ut arealet mellom de grafene, avgrenset av de to rette linjene.

a) $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^2 - 6$ og $x = 0$, $x = 2$

b) $f(x) = x^4$, $g(x) = 2x^2 - 1$ og $x = -1$, $x = 1$

c) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ og $x = 0$, $x = \ln 2$

d) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ og $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$ og $x = -1$, $x = 2$

2.7

Regn ut arealet mellom grafene til f og g, avgrenset av de to rette linjene.

a) $f(x) = 9 - x^2$, $g(x) = x^2 + 1$ og $x = -2$, $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{4 + x}$, $g(x) = 21 + \frac{1}{4}x$ og $x = 0$, $x = 12$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = e^{-x}$ og $x = 0$, $x = \ln 2$

2.8

Regn ut arealet av området mellom kurvene $y = x^2 + x + 1$ og $y = -2x^2 + 4x + 7$ mellom skjæringspunktene for de to kurvene.

3 Bestemte integral II

3.1

Estimer integralet ved å bruke trapesmetoden, med like store delintervaller og det oppgitte antallet delintervaller.

a) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\, dx$, og $n = 4$

b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2}\, dx$, og $n = 6$

c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$, og $n = 10$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$, og $n = 8$

3.2

Finn en tilnærmet verdi for integralet $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ ved Simpsons metode, først med $n = 2$, deretter $n = 4$, og så $n = 8$. Sammenlikn svaret med $\ln 2$. Hvordan endrer restleddet seg?

3.3

Følgende data er kjent for en funksjon $f(x)$.

x	0	1	2	3	4
f(x)	0.1	0.4	0.5	1	-0.1

Vi skal estimere $\int_0^4 f(x)\, dx$

a) Ved trapesmetoden

b) Ved Simpsons metode

3.4

a) Gi et estimat for integralet $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x\,dx$ ved å bruke trapesmetoden og Simpsons metode med $\Delta x = 1$.

b) Beregn integralet $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x\,dx$ eksakt.

3.5

Finn en tilnærmet verdi for integralet $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ ved Simpsons metode, først med $n = 2$, deretter $n = 4$

3.6

Regn ut de uekte integralene

a) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$

d) $\int_2^\infty x^{-5}\,dx$

3.7

Regn ut de uekte integralene

a) $\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{10}x}\,dx$

b) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx$

c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

d) $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3}\,dx$

3.8

Avgjør om de uekte integralene eksisterer.

a) $\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,dx$

b) $\int_1^\infty \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin^2 x)^2}\,dx$

3.9

Beregn følgende uekte integraler:

a) $\int_0^1 (\ln x)^2 \, dx$

b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

4 Approksimering

4.1

Regn ut Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = \frac{1}{x+1}$ om $x = 0$.

4.2

Regn ut Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ om $x = 1$.

4.3

Regn ut Taylorpolynomet av grad 4 til $f(x) = \sin^2 x$ om $x = 0$.

4.4

a) Regn ut Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = x^3 + 2x + 1$ om $x = 0$.

b) Regn ut Taylorpolynomet av grad 3 til $f(x) = x^3 + 2x + 1$ om $x = 1$.

4.5

a) Regn ut Taylorpolynomet av grad 2 til $f(x) = \ln(x+1)$ om $x = 0$ og finn restleddet. Gjør et estimat på hvor stort (lite) restleddet er når $0 \leq x \leq 1$.

b) Gjør oppgave a), men erstatt grad 2 med grad 3.

4.6

Regn ut følgende Taylorpolynom

a) For $f(x) = \sqrt{x}$, om $x = 1$ og med $n = 4$.

b) For $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, om $x = 0$ og med $n = 4$.

4.7

Regn ut Taylorpolynomet til $g(x) = \frac{1}{1-x}$ om $x = 0$ og med n ledd. Finn et uttrykk for restleddet og avgjør for hvilke x restleddet går mot 0 når $n \to \infty$.

4.8

En normalfordeling er beskrevet av funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$. Middelverdien er $\mu = 0$ og standardavviket er $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Det er velkjent at vi i dette tilfellet har

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2}\, dx = 0.6827$$

Bruk Taylorpolynomet til e^x av grad 4 til å godtgjøre dette resultatet. (Erstatt x med $-x^2$, integrer ledd for ledd og beregn det bestemte integralet.)

5 Følger og rekker

5.1

Avgjør om hver følge $\{a_n\}$ konvergerer eller divergerer. Finn grenseverdien dersom den eksisterer.

a) $a_n = 2 + (\frac{3}{5})^n$

b) $a_n = 1 - (-\frac{3}{5})^n$

c) $a_n = 2 + (-1)^n$

5.2

De gamle babylonerne hadde en metode for å beregne kvdratrøtter. De valgte en startverdi $x_0 > 0$, nær det de forventet at $\sqrt{T}$ var og definerte

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{T}{x_{n-1}}\right)$$

Så regnet de ut x_1, x_2,... inntil $x_{n-1} \approx x_n$, og dermed var $\sqrt{T} \approx x_n$. Vis at $x_n \to \sqrt{T}$ når $n \to \infty$.

5.3

Finn de fire første leddene i hver rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og regn ut delsummen $S_3 = \sum_{n=0}^{3} a_n$.

a) $a_n = 3^n$

b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

5.4

Skriv opp hver rekke ved hjelp av summetegn

a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$

b) $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

c) $2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \dots$

5.5

Finn summen av de geometriske rekkene

a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$

b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$

5.6

I en geometrisk rekke med positive ledd er det andre leddet lik $\frac{3}{4}$ og det fjerde lik $\frac{1}{3}$. Finn summen av rekka.

5.7

Vi har gitt x ved en rekke og danner $3x$:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots \\ 3x &= \quad\; 3 - 9 + 27 - 81 + 243 - \dots \end{aligned}$$

Summen av rekkene gir $x = \frac{1}{4}$. Det stemmer åpenbart ikke. Hvor ligger feilen?

5.8

Vis at likhetene gjelder for alle x ved å ta utgangspunkt i kjente Taylorrekker:

a) $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \dots$

b) $x^2 e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3!}x^5 + \dots$

c) $\sin(2x) = 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \dots$

5.9

Vis hver likhet (kun de oppgitte leddene): Bruk rekkeutviklingen til $\frac{1}{1+x}$ til å vise at

$$\frac{1}{(x+1)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots$$

5.10

Bruk integraltesten til å avgjøre om hver rekke konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

5.11

Avgjør om de alternerende rekkene konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

5.12

a) Vis at rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergerer.

b) Prøv å regne ut summen av rekka. (Hint: Bruk delbrøkoppspalting.)

5.13

Undersøk om rekka

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} - \frac{16}{3^4} + \dots$$

konvergerer eller divergerer.

6 Løsning av DL

6.1

Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = y + 1 \quad y(0) = 1$$

a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 3$

b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 5 like store delintervaller.

c) Finn en eksakt løsning av likningen og sammenlikn svarene.

6.2

Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = -2xy \quad y(0) = 1$$

a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$

b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.

c) Finn en eksakt løsning ved å separere variable og sammenlikn svarene.

6.3

Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = y^2 + x \quad y(0) = 1$$

a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$

b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.

6.4

Vi har gitt en differensiallikning

$$y' - y = \frac{1}{1-x} \quad y(0) = -1$$

a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 6$ og husk at $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ for $|x| < 1$.

b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.

6.5

Vi har gitt en differensiallikning

$$(1-x)y'' = 2y'y \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{3})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 6$.

7 Funksjoner i flere variable I

7.1

Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Forsøk også å tegne grafen.

a) $f(x, y) = x + 2$

b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = y^2 - x^2$

7.2

Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

a) $f(x, y) = e^{xy}$

b) $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + \cos^{(\pi y)}$

7.3

Lag en skisse av nivåkurvene til Cobb-Douglas produksjonsfunksjon

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

7.4

Skisser noen nivåkurver for funksjonen $f(x, y) = \frac{x}{y}$ over det halvåpne rektangelet $[-1, 1] \times (0, 1]$.

7.5

Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$

b) $f(x, y) = x + \sin x + 1$

c) $f(x, y) = x^2 y^2 + xy$

7.6

Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$

b) $f(x, y) = e^{xy}$

c) $f(x, y) = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$

7.7

Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3$

c) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

7.8

Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$

b) $f(x, y) = xy$

c) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$

7.9

Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $fx, y) = e^{x+y}$

b) $f(x, y) = \sin(xy)$

8 Funksjoner i flere variable II

8.1

Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 y^2$

b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

c) $f(x, y) = 1 - x^2$

8.2

Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

8.3

Vis at blant alle rektangler med et gitt areal, så har kvadratet den minste omkretsen.

8.4

Gitt $S > 0$. Vis at blant alle tall x og y slik at $x + y = S$, så er summen $x^2 + y^2$ minst når $x = y$.

8.5

Dersom et firma produserer x artikler av en bestemt vare vil de kunne selge alle til en pris $p = 5 - 0,0005x$, $0 \leq x \leq 8000$. Produksjonskostnaden ved å produsere x artikler er $C(x) = 500 + x$. Fortjenesten blir da $f(x) = (5 - 0,0005x)x - (500 + x)$.

a) Hvor stor fortjeneste kan firmaet ha med disse rammene?

Anta nå at to firmaer produserer samme vare til samme pris og konkurerer om de samme kundene. Vi antar at de to firmaene produserer henholdsvis x og y artikler. Fortjenesten til firma 1 er gitt ved

$$f_1(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))x - (500 + x)$$

og for firma 2

$$f_2(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))y - (500 + y)$$

b) Anta at begge fimaene maksimerer sin fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste for hvert firma nå?

c) Dersom firmaene opptrer som en enhet utad og bare deler fortjenesten, hvor mye ville de da kunne tjene? Kommenter forskjellen på svarene i b) og c).

8.6

Et rektangel har hjørner $(0, 0)$, $(0, y)$, $(x, 0)$ og (x, y). Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når $x = y$. Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn også svarene med forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet av en sirkel.

8.7

En rettvinklet trekant har hjørner $(0, 0)$, $(0, y)$ og $(x, 0)$. Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når $x = y$. Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn svaret med svaret i forrige oppgave.

9 Lagranges metode

9.1

Vi antar at folkemengden $N = N(t)$ i Norge vokser eksponensielt, etter formelen

$$N(t) = Be^{at}$$

der a og B er konstanter og t er tiden. I vårt eksempel regner vi tiden i år og at 1. januar 1900 er 0. Vi skal se på logaritmen til denne funksjonen, gitt ved

$$\ln(N) = \ln(B) + at$$

Antakelsen om at veksten er eksponensiell gir at $\ln(N)$ vokser lineært med tiden. Følgende tall for befolkningsmengden er observert:

t	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
N	2.96	3.25	3.57	3.68	4.08	4.23	4.48
$\ln(N)$	1.09	1.18	1.27	1.30	1.41	1.44	1.50

der befolkningstallene er i hele millioner. ($\sum x = 49$, $\sum x^2 = 371$, $\sum y = 9.19$, $\sum xy = 66.21$)

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom tallene i første og tredje rad og bruk dette til å finne en formel for befolkningsstørrelsen. Når vil vi med denne modellen passere 5 millioner?

9.2

Et firma har de første 9 årene etter oppstart hatt omsetning slik det er beskrevet i tabellen:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	0.8	1.0	1.4	1.9	2.0	2.6	3.5	4.4	4.7

hvor omsetningen er i hele millioner.

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom omsetningen og t og bruk dette til å finne en formel for omsetningen. Hva sier modellen om omsetningen i år 10?

9.3

Bruk Lagranges metode til å finne eventuelle ekstremalpunkter for $f(x, y)$ under den gitte betingelsen

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $2x + 6y = 2000$

b) $f(x, y) = xy$, $x + y = 100$

c) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 1$

9.4

Bestem hva slags ekstremalpunkter de kritiske punktene i forrige oppgave representerer.

9.5

a) Hvilket punkt på linja $2x + y = 1$ ligger nærmes origo, og hvor stor er denne avstanden?

b) Samme type oppgave som i a), hvilket punkt på sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ ligger nærmest et vilkårlig punkt (a, b)?

9.6

Bruk Lagranges metode til å finne eventuelle ekstremalpunkter for $f(x, y)$ under den gitte betingelsen

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $xy = 1$

b) $f(x, y) = xy$, $x^2 + y^2 = 1$

9.7

Finn største og minste verdi av funksjonen $f(x, y) = x^2y$ over den delen av sirkelen $x^2 + y^2 = 3$ som ligger i første kvadrant.

10 Vektorkalkulus I

10.1

Regn ut gradienten til funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b) $f(x, y) = e^x \cos(y)$

c) $f(x, y) = x^2y^3$

10.2

Regn ut gradienten til funksjonene

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \sin(xy) + xyz$

b) $f(x, y, z, w) = e^{xz}(\cos(y) + \sin(w))$

c) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

10.3

Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 1, 2x^3y + 1)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$

10.4

Avgjør om vektorfeltet har et potensial, og finn i så fall dette.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x, \cos x)$

10.5

Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y, x^3)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y - x - 2y)$

10.6

Vis at et konstant vektorfelt er konservativt. Finn et potensial for et konstant vektorfelt.

11 Vektorkalkulus II

11.1

Hvilke av parene av vektorer står normalt på hverandre?

a) $(1, 0)$ og $(0, 1)$

b) $(1, 2)$ og $(2, 1)$

c) $(2, 3)$ og $(-3, 2)$

11.2

Hvilke av parene av vektorfelt står normalt på hverandre?

a) $(x, y - 2)$ og $(2 - y, x)$

b) $(x, -y)$ og $(y, -x)$

c) $(x^2 - x, xy)$ og $(y, 1 - x)$

11.3

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-1, 1)$.

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}^{\perp}$ har et potensial.

b) Finn et potensial for $\mathbf{F}^{\perp}$.

c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(2, 2)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.

11.4

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (1, 2x)$.

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}^{\perp}$ har et potensial.

b) Finn et potensial for $\mathbf{F}^{\perp}$.

c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(0, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.

11.5

Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2, 2xy + 2)$.

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}^{\perp}$ har et potensial.

b) Finn et potensial for $\mathbf{F}^{\perp}$.

c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(1, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet $\mathbf{F}$.

12 Vektorkalkulus III

12.1

Beregn sirkulasjonen for vektorfeltene.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y, xy^3)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$

12.2

a) Beregn sirkulasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^3, x^3 - y^2)$.

b) Finn de kritiske punktene til sirkulasjonen og avgjør hvor den har sin minste verdi.

12.3

Beregn sirkulasjonen for vektorfeltene.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2y^2+1, 2x^3y+1)$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$

c) $\mathbf{F}(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$

12.4

Beregn sirkulajonen til vektrofeltene og dens største verdi.

a) $\mathbf{F}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (\sin y, \cos x)$

12.5

Vi har gitt en nivåkurve $f(x,y) = C$. Tangentvektorfeltet til denne kurven er gitt ved $\mathbf{T}(x,y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Vis at sirkulasjonen til tangentfeltet er gitt ved $f_{xx} + f_{yy}$, hvor vi bruker notasjonen $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$, osv.

12.6

Regn ut $f_{xx} + f_{yy}$ for funksjonene

a) $f(x,y) = 2x + 3y - 1$

b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$

c) $f(x,y) = e^{xy}$

13 Multippel integrasjon

13.1

Beregn dobbeltintegralet $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ for

a) $f(x,y) = xye^{x^2y^2}$, hvor $D = [1,3] \times [1,2]$.

b) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y+1}$, hvor $D = [1,4] \times [1,2]$.

c) $f(x,y) = \sin xe^y$, hvor $D = [0,\pi] \times [-1,0]$.

13.2

Beregn dobbeltintegralet $\iint_D f(x,y)dx\,dy$ for

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, hvor $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

b) $f(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4$, hvor $D = [0,1] \times [0,1]$.

c) $f(x,y) = xe^{xy}$, hvor $D = [0,1] \times [-1,1]$.

13.3

Finn volumet av legemet som ligger mellom området $[0,1] \times [0,1]$ i xy-planet og grafen til funksjonen$f(x,y) = x + y$.

13.4

En eske har grunnflate $G = [0,1] \times [0,1]$ og høyde gitt ved funksjonen $g(x,y) = 4 - x - y$. Finn volumet av esken.

13.5

Beregn dobbeltintegralene.

a) $\int_0^2 \int_{y^2-1}^{y^3} 3\,dx\,dy$

b) $\int_0^1 \int_x^{2x} (x+y)^2\,dy\,dx$

c) $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y}\,dx\,dy$

13.6

Finn gjennomsnittsverdien av $x^2 + y^2$ over følgende områder:

a) Kvadratet $[0,1] \times [0,1]$

b) Kvadratet $[a, a+1] \times [0,1]$, hvor $a > 0$.

c) Kvadratet $[0,a] \times [0,a]$, hvor $a > 0$.

13.7

Finn tyngdepunktet til området i xy-planet som ligger mellom grafen til $y = 1 - x^2$ og $-1 \leq x \leq 1$ på x-aksen.

13.8

a) Finn arealet til området i xy-planet som ligger mellom grafene til $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$, og for $0 \leq x \leq 1$.

b) Finn tyngdepunktet til området beskrevet i oppg. a).

14 Kurveintegraler I

14.1

Skriv kurvene på parameterform:

a) $x - y = 0$

b) $x^2 - y = 2$

c) $x^2 + y^2 = 1$

14.2

Finn en likning for de parametriserte kurvene

a) $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$

c) $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

14.3

Finn skjæringspunktene mellom de to kurvene $\mathbf{r}_1(t) = (t^2 + 1, 1 - t)$ og $\mathbf{r}_2(t) = (t, 2t - 4)$.

14.4

Finn en tangentvektor og en normalvektor de kurvene

a) $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$

c) $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

14.5

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 2t + 1)$, $0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}(t) = (at, bt)$, $0 \leq t \leq 1$

14.6

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2)$, $0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

14.7

Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$, $0 \leq t \leq 5$

15 Kurveintegraler II

15.1

Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ langs parabelen $y = x^2$ fra $x = -1$ til $x = 1$.

15.2

Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (2 - y, x)$ langs kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

15.3

Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ langs den rette linja fra $(0, 0)$ til $(2, 4)$.

15.4

Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, -x + y)$ langs en hel runde av sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

15.5

Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ ikke er en gradient. Finn også en vei C slik at $\oint_C f\, ds \neq 0$.

15.6

Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -xy - x)$ ikke er en gradient. Finn også en vei C slik at $\oint_C f\, ds \neq 0$.

15.7

a) Beregn gradienten ∇f til funksjonen $f(x, y) = x^2y + xy^2$.

b) Beregn kurveintegralet av vektorfeltet ∇f langs en rett linje mellom punktene $(0, 0)$ og $(2, 4)$.

c) Beregn kurveintegralet av det samme vektorfeltet mellom de samme pnktene, men denne gangen langs parabelen $y = x^2$.

15.8

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin{(xy)}, x \sin{(xy)})$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene $(-1, \frac{\pi}{2})$ og $(1, -\frac{\pi}{2})$.

15.9

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (e^y, xe^y)$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene $(-1, 1)$ og $(1, 1)$.

15.10

a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (1, 1)$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) rundt en hel sirkel, gitt ved $x^2+y^2 = 4$

16 Greens teorem

16.1

En ellipse C er gitt ved $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Bruk Greens teorem på vektrofeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ til å beregne arealet av ellipsen.

16.2

Et område D i (x, y)-planet er avgrenset av en kurve C gitt ved rette linjer gjennom de fire hjørnene $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ og $(2, 2)$. Beregn kurveintegralet (mot klokka)

$$\oint_C y^2\, dx + x\, dy$$

ved å bruke Greens teorem.

16.3

Samme oppgave som over, men la området være avgrenset av hjørnene $(\pm 1, \pm 1)$.

16.4

Samme oppgave som over, mn nå lar vi området være avgrenset av en sirkel om origo, med radius lik 2

17 Fasit

17.1 En-variabel kalkulus

17.1.1

a) i) $x = \frac{3}{2}$, ii) Avtagende på $(-\infty, \frac{3}{2}]$, voksende på $[\frac{3}{2}, \infty)$, iii) lokalt minimum i $x = \frac{3}{2}$, iv) Ingen krumning, v) Ingen vendepunkter

b) i) $x = \pm 1$, ii) Voksende på $(-\infty, -1]$ og på $[1, \infty)$, avtagende på $[-1, 1]$, iii) lokalt minimum i $x = 1$, lokalt maks i $x = -1$, iv) Krummer opp på $[0, \infty)$, krummer ned på $(-\infty, 0]$, v) Vendepunkt for $x = 0$

c) i) $x = 1$, ii) Voksende på $[1, \infty)$, avtagende på $(-\infty, 1]$, iii) lokalt minimum i $x = 1$, iv) Krummer opp på overalt, v) Ingen vendepunkt

d) i) $x = 2^{\frac{1}{3}}$, ii) Voksende på $(-\infty, 0 >]$ og på $[2^{\frac{1}{3}}, \infty)$, avtagende på $(0, 2^{\frac{1}{3}}]$, iii) lokalt minimum i $x = 2^{\frac{1}{3}}$, iv) Krummer opp på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, v) Ingen vendepunkt

e) i) Ingen kritiske punkter, ii) Alltid voksende, iii) Ingen ekstremalpunkter, iv) Krummer opp på $[(4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}]$ og ned på $[(4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}]$, v) Vendepunkt for $[(2k+1)\frac{\pi}{2}]$,

17.1.2

a) i) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ii) Avtagende på $[-1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, voksende på $[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2]$, iii) Lokalt minimum i $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, lokale maks i $x = -1$ og $x = 2$, iv) Krummer ned på $[-1, 0]$ og opp på $[0, 2)$, v) $x = 0$ vi) Maks i $x = -1$ og min i $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) i) $x = 0$, ii) Avtagende på $[0, 2]$, iii) Lokalt minimum i $x = 2$, lokalt maks i $x = 0$, iv) Krummer ned på hele $[0, 2]$, v) Ingen vendepunkt vi) Globalt minimum i $x = 2$, globalt maks i $x = 0$.

c) i) Ingen, ii) Voksende i hele definisjonsområdet, iii) Lokalt minimum i $x = 0$, lokalt maks i $x = 2\pi$, iv) Krummer opp på $[0, \pi]$ og ned på $[\pi, 2\pi]$, v) $x = \pi$ vi) Maks i $x = 2\pi$ og min i $x = 0$.

d) i) $x = 0$ og $x = \pm\frac{\pi}{2}$, ii) Avtagende på $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ og $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, voksende på $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ og $[0, \frac{\pi}{2}]$, iii) Lokalt minimum i $x = 0$ og i $x = \pm\pi$, lokale maks i $x = \pm\frac{\pi}{2}$, iv) Krummer ned på $[-\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi]$ og på $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, og opp på $[-\pi, -\frac{3}{4}\pi]$, $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ og $[\frac{3}{4}\pi], \pi]$, v) $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ og $x = \frac{3}{4}\pi$ vi) Globalt minimum i $x = 0$ og i $x = \pm\pi$, globalt maks i $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

17.1.3

a) Vokser på $[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ og $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 3]$, avtar på $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$, lokalt min for $x = -1$, lokalt maks for $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, globalt min for $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, globalt maks for $x = 3$.

b) Krummer ned på $[-1, 0]$, opp på $[0, 3]$, vendepunkt i $x = 0$

17.1.4

a) Vokser på $(-\infty, a]$, avtar på $[a, \infty)$, globalt maks for $x = a$.

b) Krummer opp på $(-\infty, a-1]$ og på $[a+1, \infty)$, ned på $[a-1, a+1]$, vendepunkt i $x = a \pm 1$

17.1.5

Vokser på $[1, 3]$, avtar på $[\frac{1}{4}, 1]$, minste verdi for $x = 1$, størset verdi for $x = 3$.

17.2 Bestemte integral I

17.2.1

a) 9

b) 18

c) 16

d) 0

17.2.2

a) $\frac{9}{2}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $2 + \frac{1}{2}\pi^2$

17.2.3

a) $\frac{3}{2}$

b) $2\ln 2 + \frac{14}{3}$

c) $\frac{\sin(2\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$

d) $\frac{1}{6}(e^3 - 1)$

e) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

17.2.4

a) $\frac{5}{2}$

b) 1

c) 1

17.2.5

a) $\frac{14}{3}$

b) $\frac{3}{2} + \ln 2$

c) $\frac{2}{3}$

17.2.6

a) 8

b) $\frac{16}{15}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\sqrt{2} - 1$

e) $\frac{9}{2}$

17.2.7

Regn ut arealet mellom grafene til f og g, avgrenset av de to rette linjene.

a) $\frac{64}{3}$

b) $270 - \frac{112}{3}$

c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\ln 2)^2$

17.2.8

$\frac{27}{2}$

17.3 Bestemte integral II

17.3.1

a) 1.98

b) 1.88

c) 1.52

d) 1.76

17.3.2

$n = 2$: 0.6944 ± 0.0208, $n = 4$: 0.6936 ± 0.0052, $n = 8$: 0.6931 ± 0.0013, $\ln 2 \approx 0.6931$

17.3.3

a) 1.9

b) 2.2

17.3.4

a) -38, -37.3

b) -37.9

17.3.5

$n = 2$: 0.7833, $n = 4$: 0.7854

17.3.6

a) 1

b) 2

c) 1

d) $\frac{1}{64}$

17.3.7

a) 10

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

17.3.8

a) Eksisterer

b) Eksisterer ikke

c) Eksisterer ikke

17.3.9

a) 2

b) 4

17.4 Approksimering

17.4.1

$1 - x + x^2 - x^3$

17.4.2

$1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3$

17.4.3

$x^2 - \frac{1}{3}x^4$

17.4.4

a) $x^3 + 2x + 1$

b) $4 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

17.4.5

a) $x - \frac{1}{2}$, $E_2(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{c+1}\right)^3$, $|E_2(x)| \leq \frac{1}{3}x^3$

b) $x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^3$, $E_3(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{c+1}\right)^4$, $|E_3(x)| \leq \frac{1}{4}x^4$

17.4.6

a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$

b) $1 - x^2 + x^4$

17.4.7

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, $E_n = \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}$, $-1 < x < \frac{1}{2}$ (men rekken konvergerer for $|x| < 1$)

17.4.8

17.5 Følger og reker

17.5.1

a) Konvergerer

b) Konvergerer

c) Divergerer

17.5.2

17.5.3

a) $1 + 3 + 9 + 27 = 40$

b) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{73}{12}$

17.5.4

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}$

b) $3 \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n$

c) $2 \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n$

17.5.5

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

17.5.6

$\frac{27}{8}$

17.5.7

Rekka diveregerer og da kan vi ikke regne på denne måten.

17.5.8

17.5.9

17.5.10

a) Divergerer

b) Divergerer

c) Konvergerer

d) Divergerer

17.5.11

a) Konvergerer

b) Konvergerer

c) Divergerer

d) Konvergerer

17.5.12

a)

b) 1

17.5.13

Konvergerer

17.6 Løsning av DL

17.6.1

a) 2.292

b) 2.221

c) $2\ln 2 - 1 \approx 2.297$

17.6.2

a) 0.781

b) 0.796

c) $e^{-0.25} \approx 0.779$

a) 2.12

b) 2.08

17.6.3

a) -0.777

b) -0.810

17.6.4

1.53

17.7 Funksjoner i flere variable I

17.7.1

17.7.2

17.7.3

17.7.4

17.7.5

a) $2x$, $3y^2$

b) $1 + \cos x,\ 0$

c) $2xy^2 + y,\ 2x^2y + x$

17.7.6

a) $\sin y + y\cos x,\ x\cos y + \sin x$

b) $ye^{xy},\ xe^{xy}$

c) $\frac{1}{y},\ -\frac{x}{y^2}$

17.7.7

a) $y + z,\ x + z,\ y + x$

b) $x_2x_3 - x_1x_3,\ x_1x_3,\ x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1^2$

c) $2x_1,\ 2x_2,\ \ldots,\ 2x_n$

17.7.8

a) $2 \cdot 6y - 0^2 = 12y$

b) $0 \cdot 0 - 1^2 = -1$

c) $0 \cdot (-x\sin y) - (\cos y)^2 = -\cos^2 y$

17.7.9

a) 0

b) 0

17.8 Funksjoner i flere variable I

17.8.1

a) $(0, 0)$

b) $(0, 0)$

c) $(\frac{1}{2}, y)$

17.8.2

a) $(0, 0)$ og $(1, 1)$

b) $(0, 0)$ og $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

c) $(0, 0)$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

17.8.3

17.8.4

17.8.5

a) 7500

b) 3056

c) 3750

17.8.6

16 (sirkel: 4π)

17.8.7

$4(3+\sqrt{2})$

17.9 Lagranges metode

17.9.1

$\ln N = 0.0067 \cdot t - 11.89$ gir $N = 6,86 \cdot 10^{-6} \cdot e^{0,0067t}$, 2014

17.9.2

$z = 0,51t - 0,08,\ 5.0$

17.9.3

a) $(100, 300)$

b) $(50, 50)$

c) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$

17.9.4

a) Minimum

b) Maksimum

c) Minimum

17.9.5

a) $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}),\ \frac{1}{\sqrt{5}})$

b) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a, b)$

17.9.6

a) $(1,1)$ og $(-1,-1)$; minimum

b) Maksimum: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, minimum: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ og $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

17.9.7

Størst: 2, minst: 0

17.10 Vektorkalkulus I

17.10.1

a) $2x + y^3 \cos(xy)$, $2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy)$

b) $e^x \cos y$, $-e^x \sin y$

c) $2xy^3$, $3x^2y^2$

17.10.2

a) $(2x + y^3 \cos(xy) + yz, 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy) + xz, xy)$

b) $(ze^{xz}(\cos y + \sin w), -e^{xz} \sin y, xe^{xz}(\cos y + \sin w), e^{xz} \cos w)$

c) $(2x_1, \dots, 2x_n)$

17.10.3

a) Konservativt, $x^3y^2 + x + y$

b) Ikke konservativt

c) Konservativt, $\sin xy$

17.10.4

a) Konservativt, e^{xy}

b) Ikke konservativt

17.10.5

a) Konservativt, $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

b) Konservativt, x^3y

c) Ikke konservativt

17.10.6

$ax + by$

17.11 Vektorkalkulus II

17.11.1

a) og c)

17.11.2

a) og c)

17.11.3

b) $-x-y$

c) $x+y=4$

17.11.4

b) $y-x^2$

c) $y-x^2=1$

17.11.5

b) x^2y+2x

c) $x^2y+2x=3$

17.12 Vektorkalkulus III

17.12.1

a) y^3-x^2

b) $2x$

c) $2x-2y$

17.12.2

a) $3x^2+3y^2$

b) $(0,0)$

17.12.3

a) 0

b) $3x^2e^y$

c) 0

17.12.4

a) 0

b) $-\sin x + \cos y$, 2

17.12.5

17.12.6

a) 0

b) 6

c) $(x^2 + y^2)e^{xy}$

17.13 Multippel integrasjon

17.13.1

a) $\frac{1}{4}(e^4 - e)(e^9 - e)$

b) $\frac{45}{4} + \frac{15}{2}\ln 3 - \frac{15}{2}\ln 2$

c) $2 - \frac{2}{e}$

17.13.2

a) $\frac{8}{3}$

b) $\frac{2}{15}$

c) $e + \frac{1}{e} - 2$

17.13.3

1

17.13.4

3

17.13.5

a) 10

b) $\frac{19}{12}$

c) $\frac{1}{4}e^4 - e + \frac{3}{4}$

17.13.6

a) $\frac{2}{3}$

b) $a^2 + a\frac{2}{3}$

c) $\frac{2}{3}a^2$

17.13.7

$\overline{x} = 0$, $\overline{y} = \frac{2}{5}$

17.13.8

a) $\overline{x} = \frac{3}{10}$, $\overline{y} = \frac{6}{35}$

b) $a^2 + a\frac{2}{3}$

17.14 Kurveintegraler I

17.14.1

a) (t, t)

b) $(t, t^2 - 2)$

c) $(\sin t, \cos t)$

17.14.2

a) $x - \sin^2(y+1) = 0$

b) $x - 2y = 5$

c) $x^3 - y^2 = 0$

17.14.3

$(2, 0)$ og $(\frac{13}{4}, \frac{5}{2})$

17.14.4

a) $(2, 1)$, $(-1, 2)$

b) $(2t, 3t^2)$, $(-3t^2, 2t)$

c) $(\sin 2t, 1)$, $(-1, \sin 2t)$

17.14.5

a) $2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{a^2 + b^2}$

17.14.6

a) $\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2}$

17.14.7

a) 2π

b) $\frac{343}{27}$

17.15 Kurveintegraler II

17.15.1

$-\frac{14}{15}$

17.15.2

-2π

17.15.3

$\frac{20}{3}$

17.15.4

-2π

17.15.5

Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

17.15.6

Trekant med hjørner $(0,0)$, $(0,1)$ og $(1,0)$.

17.15.7

a) $(2xy + {}^2, x^2 + 2xy$

b) 48

c) 48

17.15.8

b) $-\cos(xy)$

c) 0

17.15.9

b) xe^y

c) $2e$

17.15.10

b) $x + y$

c) 0

17.16 Greens teorem

17.16.1

πab

17.16.2

-4

17.16.3

4

17.16.4

4π