1. MAT 1012, Øvelsesoppgaver, 15.-19. februar 2010

1.1. Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Forsøk også å tegne grafen.

a) $f(x, y) = x + 2$
b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
c) $f(x, y) = y^2 - x^2$

1.2. Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

a) $f(x, y) = e^{xy}$
b) $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + \cos^{(\pi y)}$

1.3. Lag en skisse av nivåkurvene til Cobb-Douglas produksjonsfunksjon

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

1.4. Skisser noen nivåkurver for funksjonen $f(x, y) = \frac{x}{y}$ over det halvåpne rektangelet $[-1, 1] \times (0, 1]$.

1.5. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$
b) $f(x, y) = x + \sin x + 1$
c) $f(x, y) = x^2 y^2 + xy$

1.6. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$
b) $f(x, y) = e^{xy}$
c) $f(x, y) = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$

1.7. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$
b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3$
c) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$

1.8. Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$
b) $f(x, y) = xy$
c) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$

1.9. Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $fx, y) = e^{x+y}$
b) $f(x, y) = \sin(xy)$

2. Funksjoner i flere variable II

2.1. Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 y^2$
b) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$
c) $f(x, y) = 1 - x^2$

2.2. Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
a) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$
a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

2.3. Vis at blant alle rektangler med et gitt areal, så har kvadratet den minste omkretsen.

2.4. Gitt $S > 0$. Vis at blant alle tall x og y slik at $x + y = S$, så er summen $x^2 + y^2$ minst når $x = y$.

2.5. Dersom et firma produserer x artikler av en bestemt vare vil de kunne selge alle til en pris $p = 5 - 0,0005x$, $0 \leq x \leq 8000$. Produksjonskostnaden ved å produsere x artikler er $C(x) = 500 + x$. Fortjenesten blir da $f(x) = (5 - 0,0005x)x - (500 + x)$.

a) Hvor stor fortjeneste kan firmaet ha med disse rammene?

Anta nå at to firmaer produserer samme vare til samme pris og konkurerer om de samme kundene. Vi antar at de to firmaene produserer henholdsvis x og y artikler. Fortjenesten til firma 1 er gitt ved

$$f_1(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))x - (500 + x)$$

og for firma 2

$$f_2(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))y - (500 + y)$$

b) Anta at begge fimaene maksimerer sin fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste for hvert firma nå?

c) Dersom firmaene opptrer som en enhet utad og bare deler fortjenesten, hvor mye ville de da kunne tjene? Kommenter forskjellen på svarene i b) og c).

2.6. Et rektangel har hjørner $(0, 0)$, $(0, y)$, $(x, 0)$ og (x, y). Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når $x = y$. Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn også svarene med forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet av en sirkel.

2.7. En rettvinklet trekant har hjørner $(0, 0)$, $(0, y)$ og $(x, 0)$. Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når $x = y$. Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn svaret med svaret i forrige oppgave.