

1. MAT 1012, ØVELSESOPPGAVER, 15.-19. MARS 2010

**1.1.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$  langs parabelen  $y = x^2$  fra  $x = -1$  til  $x = 1$ .

**1.2.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (2 - y, x)$  langs kurven gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  fra  $t = 0$  til  $t = 2\pi$ .

**1.3.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  langs den rette linja fra  $(0, 0)$  til  $(2, 4)$ .

**1.4.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, -x + y)$  langs en hel runde av sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$

**1.5.** Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$  ikke er en gradient. Finn også en vei  $C$  slik at  $\oint_C f ds \neq 0$ .

**1.6.** Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y, -xy - x)$  ikke er en gradient. Finn også en vei  $C$  slik at  $\oint_C f ds \neq 0$ .

**1.7.**

- Beregn gradienten  $\nabla f$  til funksjonen  $f(x, y) = x^2y + xy^2$ .
- Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\nabla f$  langs en rett linje mellom punktene  $(0, 0)$  og  $(2, 4)$ .
- Beregn kurveintegralet av det samme vektorfeltet mellom de samme punktene, men denne gangen langs parabelen  $y = x^2$ .

**1.8.**

- Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$  er konservativt.
- Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)
- Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene  $(-1, \frac{\pi}{2})$  og  $(1, -\frac{\pi}{2})$ .

**1.9.**

- Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (e^y, xe^y)$  er konservativt.
- Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)
- Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene  $(-1, 1)$  og  $(1, 1)$ .

**1.10.**

- Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (1, 1)$  er konservativt.
- Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)
- Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) rundt en hel sirkel, gitt ved  $x^2 + y^2 = 4$

**2. GREENS TEOREM**

**2.1.** En ellipse  $C$  er gitt ved  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Bruk Greens teorem på vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  til å beregne arealet av ellipsen.

**2.2.** Et område  $D$  i  $(x, y)$ -planet er avgrenset av en kurve  $C$  gitt ved rette linjer gjennom de fire hjørnene  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  og  $(2, 2)$ . Beregn kurveintegralet (mot klokka)

$$\oint_C y^2 dx + x dy$$

ved å bruke Greens teorem.

**2.3.** Samme oppgave som over, men la området være avgrenset av hjørnene  $(\pm 1, \pm 1)$ .

2

**2.4.** Samme oppgave som over, men nå lar vi området være avgrenset av en sirkel om origo, med radius lik 2

### 3. FASIT