1 Mandag 18. januar 2010

I denne første forelesningen skal vi friske opp litt rundt funksjoner i en variabel, se på hvordan de vokser/avtar, studere kritiske punkter og beskrive krumning og vendepunkter. Vi får ikke direkte bruk for dette, men det vil være en god bakgrunn for det vi skal gjennom for funksjoner i flere variable.

- Voksende og avtagende funksjoner
- Lokale ekstremalpunkter
- Kritiske punkter
- Globale ekstremalpunkter
- Krumning
- Vendepunkter

Det første begrepet vi skal se på er monotoni-egenskapene til en funksjon, dvs. hvor de vokser og hvor de avtar.

Definisjon 1.1. *En funksjon $y = f(x)$ er **(strengt) voksende** på et intervall $[a, b]$ dersom $f(x_1) \leq f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ for alle $x_1 < x_2$. Funksjonen er **(strengt) avtagende** dersom $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ for alle $x_1 < x_2$.*

Eksempel 1.2. *Funksjonen $f(x) = x^2$ er strengt voksende på intervallet $[0, \infty >$, siden $x_1^2 < x_2^2$ når $x_1 < x_2$. Tilsvarende er funksjonen strengt avtagende på intervallet $< -\infty, 0]$.*

Vi starter med den lokale teorien, dvs. at vi analyserer funksjonenes lokale egenskaper. Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som måles i punkter og små omegner om dem.

Definisjon 1.3. *Det er to typer lokale ekstremalpunkter:*

- *$y = f(x)$ har et **lokalt minimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er mindre enn eller lik $f(x)$ for alle x i et åpent intervall om $x = c$.*
- *$y = f(x)$ har et **lokalt maksimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er større enn eller lik $f(x)$for alle x i et åpent intervall om $x = c$.*

Teorem 1.4. *Dersom $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ på et intervall, så vokser (henholdsvis avtar) $f(x)$ på intervallet.*

Eksempel 1.5. *Vi ser på funksjonen $f(x) = x^2$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = 2x$, som betyr at funksjonen vokser på intervallet $(0, \infty)$ og avtar på intervallet $(-\infty, 0)$.*

Eksempel 1.6. *Betrakt funksjonen $f(x) = e^x$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = e^x > 0$, som betyr at funksjonen vokser overalt.*

Et helt sentralt begrep innen kalkulus er kritiske punkter:

Definisjon 1.7. *Et punkt $x = c$ kalles et **kritisk punkt** dersom $f'(c) = 0$ eller $f'(c)$ ikke eksisterer.*

Eksempel 1.8. *Funksjonen $f(x) = |x|$ har et kritisk punkt i $x = 0$ siden $f'(0)$ ikke er definert i det punktet.*

Eksempel 1.9. *Alle potensfunksjoner $g(x) = x^n$ for $n \geq 2$ har kritisk punkt i $x = 0$ siden $f'(0) = n \cdot 0^{n-1} = 0$.*

Eksempel 1.10. *Funksjonen $h(x) = \frac{1}{x}$ har **ikke** et kritisk punkt i $x = 0$ siden funksjonen ikke er definert i dette punktet.*

Ofte er det sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men det er ikke alltid sant. Den ene retningen er sann:

Teorem 1.11. *Dersom $f(x)$ har et lokalt maksimum eller lokalt minimum i $x = c$, så er c et kritisk punkt.*

Bevis 1.12. *Se på*

$$f'(c) \approx \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Anta at $f(x)$ har et lokalt maksimum i $x = c$. Dersom $f'(c) > 0$, så vil $f(x) > f(c)$ for $x > c$, og dersom $f'(c) < 0$, så vil $f(x) > f(c)$ for $x < c$. Motsetning.

Med noen tilleggskrav har vi også implikasjon den andre veien.

Teorem 1.13. *Hvis $f(x)$ har et kritisk punkt i $x = c$, så er dette*

- *et lokalt minimum dersom $f'(x)$ skifter tegn fra negativ til positiv i $x = c$*
- *et lokalt maksimum dersom $f'(x)$ skifter tegn fra positiv til negativ i $x = c$*

Eksempel 1.14. *Vi ser på funksjonen $f(x) = x^2$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = 2x$, som betyr at funksjonen har et kritisk punkt i $x = 0$. Dette er også et lokalt minimumspunkt.*

Eksempel 1.15. *Gitt funksjonen $g(x) = x^3$. Den deriverte er gitt ved $g'(x) = 3x^2$, som betyr at funksjonen har et kritisk punkt for $x = 0$. Dette er imidlertid ikke noe ekstremalpunkt.*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Regner ut den deriverte og setter den lik 0 for å finne faktorisering:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$$

Tegner fortegnsskjema:

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$12x^2$	+	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	-	0	+
	$\searrow$		$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$

I motsetning til de lokale egenskapene, som måler funksjonens oppførsel i en liten omegn om et punkt, vil de globale egenskapene måle funksjonens oppførsel på hele definisjonsområdet sett under ett.

Definisjon 1.16.
- *$y = f(x)$ har et **globalt minimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er mindre enn eller lik $f(x)$for alle x i D_f.*
- *$y = f(x)$ har et **globalt maksimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er større enn eller lik $f(x)$ for alle x i D_f.*

Funksjoner trenger hverken å ha lokale eller globale ekstremalpunkter, se f.eks. på funksjonen $f(x) = x$ definert på hele tallinja. Den har selvfølgelig ingen ekstremalpunkter. For å sikre oss at en funksjon oppnår ekstremalverdier kan vi legge begrensninger på typen av definisjonsområde. Vi trenger et lukket og begrenset intervall som definisjonsområde.

Teorem 1.17. *Hvis funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig på et lukket, begrenset inervall $[a, b]$, så vil f oppnå sin maksimums- og minimums-verdi i intervallet.*

Se på

$$f(x) = x^2 e^{-x} \qquad -1 \leq x \leq 3$$

Deriverer

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$$

og tegner fortegnsskjema:

	-1	$< -1, 0 >$	0	$< 0, 2 >$	2	$< 2, 3 >$	3
x		-	0	$+$	$+$	$+$	
$2-x$		$+$	$+$	$+$	0	-	
e^{-x}		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		-	0	$+$	0	-	
	$\frown$	$\searrow$	$\smile$	$\nearrow$	$\frown$	$\searrow$	$\smile$
$f(x)$	**e**		**0**		$\frac{4}{e^2}$		$\frac{9}{e^3}$

Neste skritt er å studere funksjonenes krumningsegenskaper.

Definisjon 1.18. *En deriverbar funksjon $y = f(x)$ **krummer opp** (resp. **ned**) i et intervall (a, b) dersom $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) i intervallet.*

Teorem 1.19. *La $f(x)$ være deriverbar (to ganger deriverbar) på et intervall.*

- *Dersom $f'' > 0$ så krummer grafen oppover.*
- *Dersom $f'' < 0$ så krummer grafen nedover.*

Definisjon 1.20. *Et punkt $x = c$ der funksjonen $f(x)$ skifter krumning fra opp til ned eller motsatt, kalles et **vendepunkt** for f.*

Teorem 1.21. *Dersom $(c, f(c))$ er et vendepunkt for f, og $f''(c)$ er veldefinert, så er $f''(c) = 0$.*

Eksempel 1.22. *Funksjonen $f(x) = x^3$ har et vendepunkt i $x = 0$ siden $f''(0) = 0$ og den deriverte $f'(x)$ skifter tegn i $x = 0$.*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Regner ut den deriverte og den dobbelt-deriverte og setter den lik 0 for å finne faktorisering:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$
$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x-2)$$

Tegner fortegnsskjema for den dobbel-deriverte:

	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
$12x$	-	0	$+$	$+$	$+$
$3x-2$	-	-	-	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	-	0	$+$
	opp		ned	vendepunkt	opp

2 Onsdag 20. januar 2010

Tidligere (MAT 1001) har vi anti-derivert funksjoner for å finne løsninger av differensiallikninger. Vi skal gå litt videre med dette og se på et som kalles bestemte integraler. Regnereglene er egentlig akkurat de samme, men nå evaluerer vi integralene over et intervall slik at svaret blir et tall og ikke en funksjon. Dette tallet skal vi tolke som arealet mellom grafen og x-aksen, eller mer generelt som en akkumulert verdi for en funksjon over et tidsrom, strekning eller annet valg av tolkning av argumentet x (eller t). Det viktigste resultatet knyttet til dette er det såkalte fundamentalteoremet (introdusert av Newton og Leibniz) som knytter sammen derivasjon og integrasjon.

- Anti-derivert/ubestemt integral
- Tolking av det bestemte integral
- Integrasjonsregler og -teknikker
- Fundamentalteoremet
- Riemannsummer, eksplisitte former
- Archimedes og volumet av en kule

Teorem 2.1. *Dersom $F_1(x)$ og $F_2(x)$ begge er anti-deriverte til samme funksjon på et intervall $< a, b >$, så er de like på en konstant nær.*

Dette er grunnen til at vi alltid må legge til en integrasjonskonstant når vi anti-deriverer.

Definisjon 2.2. *La $f(x)$ være en funksjon. Familien av alle anti-deriverte til $f(x)$ kalles det **ubestemte integralet** til $f(x)$. La $F(x)$ være en slik anti-derivert. Da skriver vi*

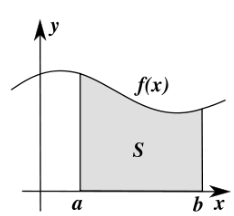
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

hvor C er en vilkårllg konstant.

Definisjon 2.3. *La $y = f(x)$ være en positiv funksjon definert på et intervall $[a, b]$. Da er*

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

definert som arealet over intervallet $[a, b]$ mellom x-aksen og grafen til f.



- Linearitet:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- Additivitet:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

- Integrasjon motsatt vei:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Degenerert areal:

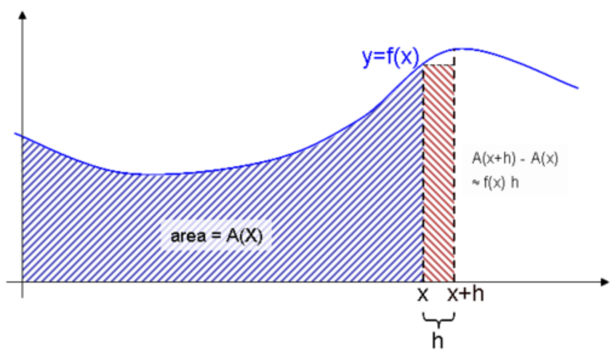
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Teorem 2.4. *La $f(x)$ være en integrerbar funksjon på et intervall $[a, b]$, og la $F(x)$ være en anti-derivert til $f(x)$. Da har vi*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Merk: Dette er den mest fundamentale egenskapen ved integralet og faktisk den egenskapen som er grunnlaget for hele differensial- og integralregningen.



$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln\frac{b}{a}$$

$$\int_a^b e^{kx}dx = \frac{1}{k}(e^{kb} - e^{ka})$$

$$\int_a^b \sin x\,dx = -\cos b + \cos a$$

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a$$

- Substitusjon:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

hvor $F(x)$ er en anti-derivert til $f(x)$.

- Delvis integrasjon:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Eksempel 2.5. *Vi skal beregne det bestemte integralet*

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx$$

Vi bruker delvis integrasjon

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = [u\cdot v]_0^\pi - \int_0^\pi u'\cdot v\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x & v' = \cos x \\ u' = 1 & v = \sin x \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\sin x\,dx \\ &= [x\sin x + \cos x]_0^\pi \\ &= \pi\sin\pi + \cos\pi - 0 - \cos 0 = -2 \end{aligned}$$

Eksempel 2.6. *Vi skal beregne det bestemte integralet*

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$$

Vi bruker substitusjon

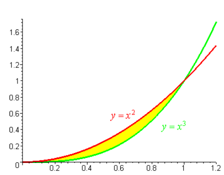
$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}e^{x^2}\,2x\,dx$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ x = 0 \textit{ gir } u = 0 & x = 2 \textit{ gir } u = 4 \end{array}}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^4 \frac{1}{2}e^u\,du \\ &= [\frac{1}{2}e^u]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1) \end{aligned}$$

Areal mellom to kurver $y = f(x)$ og $y = g(x)$, der $f(x) \geq g(x)$ på hele intervallet $[a, b]$:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = [\textit{Arealet mellom } f \textit{ og } g]$$



Eksempel 2.7.

$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}})dx = [\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}] = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Vi tenker oss at vi deler intervallet $[a, b]$ opp i delintervaller med delingspunkter

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$$

og at vi velger ut et punkt x_i i hvert delintervall, altså $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. Da vil summen (som vi kaller en Riemannsum)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

være en god approksimasjon til integralet $\int_a^b f(x)dx$. Vi kan faktisk definere

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

Eksempel 2.8. *Vi skal beregne*

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Partisjon av enhetsintervallet, med $\Delta x = \frac{1}{n}$*:*

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Vi skal beregne

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x$$

med x_i *som venstre endepunkt i delintervallene, dvs.* $x_i = \frac{i-1}{n}$.

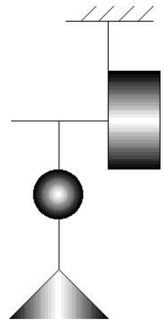
Dette gir sum

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + (\frac{3}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + (\frac{n-1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \qquad \textit{når } n \to \infty
\end{aligned}$$

Dvs.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Archimedes stilte opp et praktisk eksperiment:



Dersom systemet er i balanse er dette nok til å beregne volumet av kula. Alle legemene antas å ha tetthet lik 1. Sylinderen (til høyre) har radius og høyde lik a, kula har radius $\frac{a}{2}$, mens kjeglen også har radius og høyde lik a. Tyngdepunktet til sylinderen har armlengde $\frac{a}{2}$, dvs. et moment på $\pi a^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2}$. Armen på venstre side har lengde a og momentet er $a \cdot (V + \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a)$, der V er volumet av kula. Dersom systemet er i balanse gir dette $V = \frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3$, som er volumet av kula slik vi kjenner det. Så det gjenstår å vise at systemet er i balanse. Vi skal sammenlikne "tynne" skiver på de to figurene. La $0 \leq x \leq a$. På høyre side har vi en skive i avstand x, som gir et moment på $x \cdot \pi a^2 \, dx$. På venstre side er det litt mer regning. Kjeglen måler vi ovenifra, slik at skiva ved dybde x gir et moment på $a \cdot \pi x^2 \, dx$. Kula deler vi også ovenfra, ved Pythagoras blir radius i skiva $\sqrt{(\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2} - x)^2} = \sqrt{ax - x^2}$, dvs. et bidrag til momentet på $a \cdot \pi(ax - x^2)dx$. Dette er i balanse siden

$$\pi a^2 x \, dx = a \cdot \pi x^2 \, dx + a \cdot \pi(ax - x^2)dx$$

3 Onsdag 27. januar 2010

Oppgave 3.1 (1)**.** *La funksjonen f være definert ved*

$$f(x) = x^3 - x \qquad x \in [-1, 3]$$

a) Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for f.

b) Finn eventuelle vendepunkter for f og undersøk hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned.

Oppgave 3.2 (2)**.** *La funksjonen f være definert for alle relle tall x ved*

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$$

hvor a er en konstant.

a) Avgjør hvor f vokser og avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for f.

b) Finn eventuelle vendepunkter for f og undersøk hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned.

Oppgave 3.3 (3)**.** *a) Funksjonen $f(t)$ er gitt ved*

$$f(t) = t \ln t - t, \qquad \frac{1}{4} \leq t \leq 3$$

Avgjør hvor funksjonen f vokser og hvor den avtar og finn ut hvor i definisjonsområdet den antar sin største/minste verdi.

b) Beregn det bestemte integralet

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x}(\ln x)\, dx$$

Oppgave 3.4 (4)**.** *Regn ut de bestemte integralene*

a)

$$\int_1^4 \frac{1}{x} + \sqrt{x}\, dx$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \sin t \, \sin(\omega t)\, dt$$

Oppgave 3.5 (5)**.** *Regn ut de bestemte integralene*

a)

$$\int_0^1 x e^{3x^2}\, dx$$

b)

$$\int_0^1 x e^{2x}\, dx$$