1 Mandag 15. februar 2010

Vi begynner med et eksempel på bruk av partiell derivasjon for å gjøre såkalt lineær regresjon, eller minste kvadraters metode. Dette er en anvendelse av teorien vi har gjennomgått som gjør oss i stand til å finne en best mulig rett linje gjennom et sett av oppgitte datapunkter. I andre time skal vi se på en annen metode for å finne ekstremalpunkter, men denne gangen har funksjonene med seg såkalte bibetingelser. Det betyr at vi ikke bare skal finne maksimumsverdien til en funksjon over et område i x, y-planet, men vi kan finne maksimumsverdien over f.eks. en kurve i x, y-planet. Dette kalles Lagranges metode, oppkalt etter den franske matematikeren Lagrange, og har mange anvendelser, f.eks. i økonomi.

Lagrange metode

- Anvendelser, Minste kvadraters metode, lineær regresjon
- Betinget optimering, Lagrange metode
- Andre-derivert-test for Lagrange optimering

Forventet levealder for nyfødte jentebarn i Norge har utviklet seg slik de siste årene:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
81,53	81,52	81,93	82,33	82,52	82,66	82,66	82,95

Vi skal bruke det som kalles minste kvadraters metode til å finne en formel som beskriver disse tallene. Vi lar x være år og y være forventet levealder. Hypotesen vår er at det er en lineær sammenheng mellom disse, dvs. $y = ax + b$. Vi indekserer de 8 dataparene fra 1 til 8, slik at f.eks. $(x_3, y_3) = (2003, 81.93)$. For hvert par beregner vi avviket fra den antatte rette linja, gitt ved $ax_i + b - y_i$. Disse tallene kvadrerer vi og summerer over $1 = 1, 2, \ldots, 8$. Dernest skal vi finne de koeffisientene a og b slik at denne kvadratsummen blir minst mulig.

For å gjøre regningene litt enklere bruker vi år 1,2,3 osv. Kvadratsummen blir

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}(ax_i + b - y_i)^2 =& a^2\sum_{i=1}^{8} x_i^2 + 2ab\sum_{i=1}^{8} x_i + \sum_{i=1}^{8} b^2\\ &- 2a\sum_{i=1}^{8} x_i y_i - 2b\sum_{i=1}^{8} y_i + \sum_{i=1}^{8} y_i^2\end{aligned}$$

Vi setter inn verdiene og får dette kvadratiske avviket som en funksjon i a og b gitt ved

$$Q(a, b) = 204a^2 + 72ab + 8b^2 - 5941a - 1316b + 54139$$

Vi skal finne minimum for denne funksjonen. Vi partiellderiverer med hensyn på a og b og setter uttrykkene lik 0. Det gir

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial a} &= 408a + 72b - 5941\\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 72a + 16b - 1316\end{aligned}$$

som gir $a = 0,226$ og $b = 81,23$ og forventet levealder som en funksjon av årstall blir

$$y = 0,226(x - 2000) + 81,23 = 0,226x - 370,77$$

Sammenlikner vi med de oppgitte tallene får vi

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
81,53	81,52	81,93	82,33	82,52	82,66	82,66	82,95
81,46	81,68	81,91	82,13	82,36	82,59	82,81	83,04

Vi kan sette inn $x = 1866$ som er SSBs første registrering. Det gir forventet levealder $y = 50,95$, mens SSB oppgir 50,65 som gjennomsnitt for perioden 1866-1870. Vår lineære tilnærming er altså ut til å stemme godt. I den motsatte tidsretning ser vi at $y = 100$ gir $x = 2083$, så med samme utvikling vil jentebarn født i 2083 ha en forventet levealder på 100 år. Gjør vi den samme analysen i en generell setting får vi ut likninger for a og b;

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

som kan brukes i alle eksempler.

Gitt følgende data for korresponderende høyde og vekt for jentebarn i alderen 5-10 år. Vi skal finne en best mulig lineær sammenheng.

x	105	110	118	123	128	132	138	144
y	17.1	19.0	20.8	23.0	25.0	27.5	30.5	35.0

Vi regner ut $\sum x_i = 998$, $\sum y_i = 197.9$, $\sum x_i^2 = 125766$ og $\sum x_i y_i = 25247.9$. Setter vi $\sum x_i = 998$, $\sum y_i = 197.9$, $\sum x_i^2 = 125766$ og $\sum x_i y_i = 25247.9$ inn i formelen får vi

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$
$$= \frac{8 \cdot 25247.9 - 998 \cdot 197.9}{8 \cdot 125766 - (998)^2} \approx 0.4424$$
$$a = 0.4424$$

og

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$
$$= \frac{197.9 - 0.4424 \cdot 998}{8} = -30.5$$

Det gir sammenhengen $y = 0.4424x - 30.5$ for dataene

Lagranges metode gir oss muligheten til å finne maks og min for en funksjon over et mer generelt definisjonsområde. Definisjonsområdet kan f.eks. være en kurve eller en flate i rommet.

Lemma 1.1. *Anta at to funksjoner $f(x,y)$ og $g(x,y)$ har nivåkurver som tangerer hverandre i et punkt (x_0,y_0). Da er deres første-ordens partiellderiverte proporsjonale i punktet, dvs. det finnes en konstant λ (kalt **Lagrange multiplikator**) slik at*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

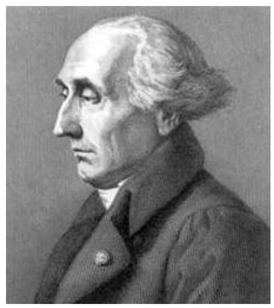
Vi skal formulere Lagranges metode i det tilfellet at definisjonsområdet er gitt som nullpunktene til en funksjon i to variable, dvs. området er en kurve i planet.

Teorem 1.2. *For å løse det betingede optimeringsproblemet :*
Finn maks eller min av funksjonen $f(x,y)$ under betingelsen $g(x,y)=0$
må vi løse det følgende likningssystemet i x, y og λ;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}, \quad g(x,y)=0$$

Dersom optimaliseringsproblemet har en løsning (x_0, y_0), så vil (x_0, y_0, λ_0) være løsning av likningssystemet for en λ_0.

Joseph-Louis Lagrange (1736 -1813), var født i Torino (han het egentlig Giuseppe Lodovico Lagrangia). Tretti år gammel etterfulgte han Leonard Euler som direktør for det prøysiske vitenskapsakademiet i Berlin. Tyve år senere flyttet han til Paris og ble kompis med Napoleon. Han er regnet som en av verdenshistoriens viktigste matematikere og matematiske fysikere.



Eksempel 1.3. *Finn maksimum for $f(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ over kurven gitt ved $80x + 20y - 120000 = 0$. (Dette eksemplet er hentet fra økonomi). Partiell derivering gir*

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = 80\lambda \\ &\frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} = 20\lambda \\ &80x + 20y - 120000 = 0 \end{aligned}$$

Eliminerer vi λ fra de to første likningene får vi $\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}}$ eller $y = 2x$. Kombinerer vi dette med den tredje likningen får v $x = 1000$, $y = 2000$, som gir minimumsverdi ≈ 1260.

Vi har også her en andre-derivert-test for å fastslå om et ekstremalpunkt er maks eller min.

Teorem 1.4. *La (x_0, y_0, λ_0) være et kritisk punkt for Lagrangefunksjonen*

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

og la

$$D(x,y,\lambda) = \big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big)\big(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\big) - \big(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\big)^2$$

Da gjelder at hvis $D(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ og $\big(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\big)(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$ (henholdsvis < 0), så har $f(x,y)$ et lokalt minimum (maksimum) i (x_0, y_0, λ_0) under betingelsen $g(x,y) = 0$.

Eksempel 1.5. *Finn maksimum for $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x - 10y + 1$ over kurven gitt ved $g(x,y) = x + y - 8 = 0$. Lagrangefunksjonen er*

$$F(x,y,\lambda) = 5x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x - 10y + 1 - \lambda(x + y - 8)$$

De partielt deriverte
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 10x - 2y - 6 - \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y - 2x - 10 - \lambda$$
og
$$\frac{\partial F}{\partial y} = -(x + y - 8)$$
settes lik 0, og vi får $x = 3$, $y = 5$ *og* $\lambda = 14$ *som det eneste kritiske punktet. De andre-deriverte;*
$$(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}) = 10, \quad (\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}) = -2, \quad (\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\partial} y})^2 = 6$$
som gir $D(3, 5, 14) = 10 \cdot 6 - (-2)^2 = 56 > 0$. *Mao, det kritiske punktet er et lokalt minimum.*

2 Onsdag 17. februar 2010

Vi fortsetter med gradienter og Lagrange metode som vi begynte på i forrige forelesning. Dette vil lede oss til teorien for vektorfelt, som vi skal jobbe videre med utover. Vektorfelt er funksjoner i flere variable der funksjonsverdiene er vektorer. Eksempel på et vektorfelt er funksjonen som til et hvert punkt i atmosfæren tilordner vindstyrke og -retning. Retningen påvektoren er vindretningen og lengden av vektoren er vindstyrken. Et annet eksempel på et vektorfelt er retningsdiagrammet til en differensiallikning, der vi til et hvert punkt i planet tilordner vektoren $(1, y')$.

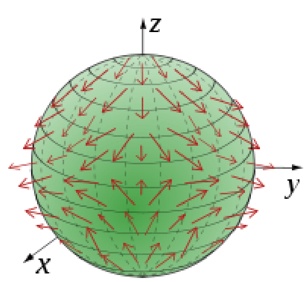
Vektorkalkulus

- Vektorfelt
- Gradienter
- Potensialfunksjoner
- Konservative vektorfelt

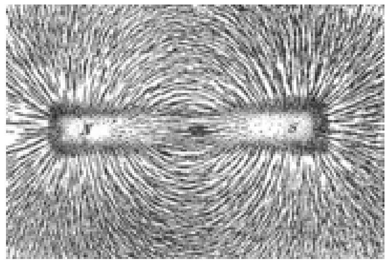
Vi har tidligere definert hva vi mener med fuksjoner i flere variable. Vi kan generalisere denne definisjonen til det som kalles vektorfelt.

Definisjon 2.1. *En funksjon*
$$F : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$$
for to naturlige tall n, m *kalles et* ***vektorfelt***.

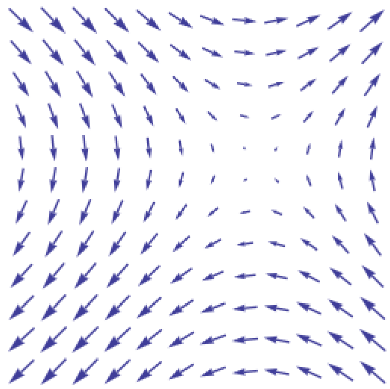
Eksempel 2.2. *Hvis vi setter* $n = m = 3$ *er et vektorfelt en funksjon som til hvert punkt i rommet tilordner en vektor i rommet. F.eks. vil en funksjon som i hvert punkt i atmosfæren angir vindretning (vektorens retning) og vindstyrke (lengden til vektoren) være et vektorfelt, mao et felt av vektorer.*



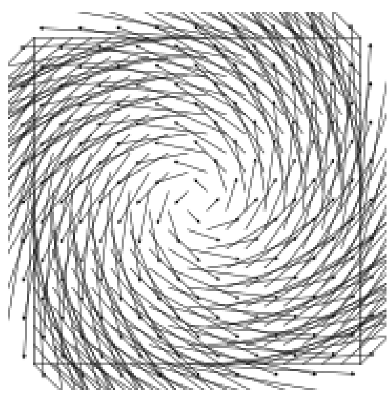
Eksempel 2.3. *Et magnetfelt kan beskrives av som et vektorfelt. Til et punkt i planet tilordner vi en vektor som angir magnetfeltets retning i dette punktet. Vi kan illustrere magnetfeltet ved å bruke jernfilspon oppå en glasplate med en magnet rett under. Sponet vil da tegne opp feltlinjene.*



Eksempel 2.4. *La* $F(x, y) = (\sin y, \sin x)$ *være et vektorfelt i planet. Vi kan illustrere feltet ved å tegne et passende utvalg av vektorer:*



Eksempel 2.5. *Vektorfeltet* $F(x, y) = (-y, x)$ *i planet kan illustreres slik:*



Hvis vi har gitt en funksjon i flere variable kan vi "derivere" funksjonen og få et vektorfelt. Denne deriverte kalles gradienten til funksjonen:

Definisjon 2.6. *La* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *være en funksjon i* n *variable.* ***Gradienten*** *til* f *er gitt ved*

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$$

Eksempel 2.7. *Funksjonen* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ *har gradient* $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$*, altså et radialfelt.*

Teorem 2.8. *La $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ være en funksjon i n variable. Da vil ∇f være en vektor som peker i retningen hvor f vokser mest, dvs gradienten står normalt på nivåmengdene.*

Eksempel 2.9. *Gradienten til funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ er $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, mens nivåflatene er kuleskall gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Det stemmer godt med at $\nabla f = 2(x, y, z)$ står normalt på kuleskallene.*

Eksempel 2.10. *La $f(x, y, z) = xyz$. Da er $\nabla f = (yz, xz, xy)$.*

Bevis 2.11. *La $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ være en kurve som er helt inneholdt i en nivåmengde for f, dvs. $F(t) = f(\gamma(t)) = C$ for alle t. Generaliseringen av kjerneregelen gir at*

$$F'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

hvor produktet er vanlig skalarprodukt mellom vektorer. Siden $F(t) = C$ er konstant vil dette skalarproduktet være 0, som er det samme som at de to vektorene står normalt på hverandre. Men $\gamma(t)$ ligger helt inne i nivåmengden, og dens deriverte vil derfor være tangent til nivåmengden. Men når gardienten står normalt på alle tangenter, står den normalt på hele mengden. Vi har tidligere sett på Lagranges metode for å finne ekstremalpunkter under betingelser. Lagranges teorem sier at dersom vi skal finne maks og min for funksjonen $f(x, y)$ under betingelsen $g(x, y) = 0$, så skal vi lete etter punkter som oppfyller $g(x, y) = 0$ og slik at gradientene til f og g er parallelle;

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

Dersom vi har funnet et ekstremalpunkt på kurven gitt ved $g(x, y) = 0$, la oss si et makspunkt, så betyr det at for alle punkter i nærheten av punktet vil verdien av funksjonen $f(x, y)$ være mindre enn verdien i punktet. Retningen for største endring vil derfor stå normalt på nivåkurven. Funksjonen $g(x, y)$ er jo nødvendigvis konstant langs kurven $g(x, y) = 0$ og vil derfor også ha sin største endring normalt på kurven. Mao er de to gradientene parallelle i makspunktet.

Vi har til en funksjon f i flere variable tilordnet et vektorfelt ∇f, som vi tenker på som en generalisering av derivasjon. Et naturlig spørsmål å stille i en slik sammenheng er om vi har noe vi kan kalle anti-derivasjon.

Problem 2.12. *Gitt et vektorfelt $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$. Kan vi finne en funksjon $f : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ slik at $F = \nabla f$?*

Definisjon 2.13. *Et vektorfelt F som er slik at det finnes f slik at $F = \nabla f$ kalles et **konservativt** vektorfelt, og funksjonen f kalles et **potensial** for F.*

Teorem 2.14. *La $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være en funksjon fra $\mathbf{R}^2$ inn i $\mathbf{R}^2$. En nødvndig betingelse for at vektorfeltet er konservativt er at*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Merk. Selv om denne betingelsen er oppfyllt er det ikke sikkert at vektorfeltet har et potensial. F.eks. er betingelsen oppfyllt for $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, (\frac{x}{x^2+y^2})$ (utenfor origo), men det finnnes ikke noe potensial.

Eksempel 2.15. *Vi har gitt et vektorfelt*

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Vi skal teste om vektorfeltet kan ha et potensial.
Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4) = 8xy^3 \qquad \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3) = 8xy^3$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $f = f(x, y)$. Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2y^3$$

Integrerer vi $2xy^4$ med hensyn på x får vi $x^2y^4 + g(y)$, der $g(y)$ er en funksjon kun i y og som går på 0 når vi deriverer med hensyn på x. Det enkleste er nå å derivere denne funksjonen med hensyn på y og sammenlikne med uttrykket over.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + g(y)) = 4x^2y^3 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $4x^2y^3$ slutter vi at $g'(y) = 0$ eller at $g(y) = K$ en konstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x, y) = x^2y^4 + K$$

3 Onsdag 24. februar 2010

Oppgave 3.1. *Vi antar at folkemengden $N = N(t)$ i Norge vokser eksponensielt, etter formelen*

$$N(t) = Be^{at}$$

der a og B er konstanter og t er tiden. I vårt eksempel regner vi tiden i år og at 1. januar 1900 er 0. Vi skal se på logaritmen til denne funksjonen, gitt ved

$$\ln(N) = \ln(B) + at$$

Antakelsen om at veksten er eksponensiell gir at $\ln(N)$ vokser lineært med tiden. Følgende tall for befolkningsmengden er observert:

t	*1940*	*1950*	*1960*	*1970*	*1980*	*1990*	*2000*
N	*2.96*	*3.25*	*3.57*	*3.68*	*4.08*	*4.23*	*4.48*
$\ln(N)$	*1.09*	*1.18*	*1.27*	*1.30*	*1.41*	*1.44*	*1.50*

der befolkningstallene er i hele millioner.

($\sum x = 49$, $\sum x^2 = 371$, $\sum y = 9.19$, $\sum xy = 66.21$)

Finn en lineær sammenheng mellom tallene i første og tredje rad og bruk dette til å finne en formel for befolkningsstørrelsen. Når vil vi med denne modellen passere 5 millioner?

Oppgave 3.2. *Bruk Lagranges metode til å finne eventuelle ekstremalpunkter for $f(x, y)$ under den gitte betingelsen*

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $2x + 6y = 2000$

b) $f(x, y) = xy$, $x + y = 100$

c) $f(x, y) = x + 2y$, $x^2 + y^2 = 1$

Oppgave 3.3. *Regn ut gradienten til funksjonene*

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b) $f(x, y) = e^x \cos(y)$

c) $f(x, y) = x^2y^3$

Oppgave 3.4. *Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.*

a) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 1, 2x^3y + 1)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$