MAT1012 - Våren 2011 - Fasit

Oppgave 1

La $(\bar{x}, \bar{y})$ angi tyngdepunktet til D. Siden området D er symmetrisk om x-aksen, er $\bar{y} = 0$. Arealet A til D er gitt ved

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos y \, dy = [\sin y]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\,.$$

Videre er

$$\iint_R x \, dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos y} x \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \, dy = \frac{\pi}{4}$$

(siden $\int \cos^2 y \, dy = \frac{1}{2} \int 1 + \cos(2y) \, dy = \frac{1}{2}\big[y + \frac{1}{2}\sin(2y)\big] + C$).

Dermed er

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_R x \, dxdy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} \quad (\simeq 0,39)\,.$$

($\bar{y} = 0$ kan også regnes ut på tilsvarende måte.)

Oppgave 2

a) curl $\mathbf{F}(x, y) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} x \, y^{\frac{1}{3}}$. Siden sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ ikke er konstant lik null i hele planet er $\mathbf{F}$ ikke konservativt.

b) La K betegne randa til R (mot klokka). Greens teorem gir

$$\int_K \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_K \, ds = \iint_R \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} x \, y^{\frac{1}{3}} \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} x \, y^{\frac{1}{3}} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \Big[\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} y - x \, y^{\frac{4}{3}} \Big]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - x \, dx = \Big[x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \Big]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

c) Direkte utregning gir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds = \int_0^5 t \, (t^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}} \cdot 1 + \big(t^{\frac{3}{2}} + (t^{\frac{3}{2}})^3 \big) \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \, dt$$

$$= \int_0^5 t^3 + \frac{3}{2} (t^2 + t^5) \, dt = \Big[\frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^3 + \frac{1}{4} t^6 \Big]_0^5 = 4125\,.$$

d) Buelengden av C er

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + (\frac{3}{2}\, t^{\frac{1}{2}})^2}\, dt = \int_0^5 \big(1{+}\frac{9}{4}\, t\big)^{\frac{1}{2}}\, dt = \Big[\, \frac{8}{27}\, \big(1{+}\frac{9}{4}\, t\big)^{\frac{3}{2}}\, \Big]_0^5 = \frac{335}{27} \quad (\simeq 12,41\,)\,.$$

Oppgave 3

a) Utregning gir $A\mathbf{u} = \mathbf{0} = 0\,\mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = -\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$, så $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er egenvektorer for A (tilhørende henholdsvis egenverdiene 0 og -1).

Videre utregning gir $\det(A - \lambda I) = -\lambda\,(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda\,(\lambda + 1)^2$. Så egenverdiene til A er 0, med multiplisitet 1, og -1, med multiplisitet 2.

b) Finner at en basis for $E_0 = \mathrm{Nul}(A)$ er f.eks. $\{\mathbf{u}\}$, mens en basis for $E_{-1} = \mathrm{Nul}(A + I)$ er f.eks. $\{(1, 1, 0), \mathbf{v}\}$. For begge egenverdiene til A er altså dimensjonen til det tilhørende egenrommet lik multiplisiten til egenverdien. Dermed er A diagonaliserbar.

En inverterbar matrise som diagonaliserer A er f.eks. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) Finner at $\mathbf{b} = (1, 3, 5) = 3\,\mathbf{u} - 2\,\mathbf{v}$. Dermed er

$$\mathbf{y} = A^{100}\,\mathbf{b} = 3\,A^{100}\,\mathbf{u} - 2\,A^{100}\,\mathbf{v} = \mathbf{0} - 2\,(-1)^{100}\,\mathbf{v} = -2\,\mathbf{v} = (-2, 0, 2)\,.$$

Oppgave 4

a) Det karakteristiske polynomet til koeffisientmatrisen til systemet blir $\lambda^2 - 4\,\lambda + 5$, som har komplekse røtter $2 \pm i$.

Utregning gir at en kompleks egenvektor tilhørende egenverdien $2 + i$ er f.eks. $\mathbf{z} = (-2, 1 + i)$. En kompleks egenfunksjon for systemet er derfor

$$\mathbf{z}(t) = e^{(2+i)t}\,(-2, 1 + i) = e^{2t}(\cos t + i\,\sin t)\,(-2, 1 + i)$$

$$= e^{2t}(-2\cos t, \cos t - \sin t) + i\,e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t)\,.$$

Den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ av systemet bli derfor

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t}\,(-2\cos t, \cos t - \sin t) + C_2\,e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t)\,,$$

dvs

$$x_1(t) = -2e^{2t}\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t)\,,$$

$$x_2(t) = e^{2t}\,(C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t))$$

der C_1 og C_2 er reelle konstanter.

b) Siden $\det(A) = 3 + 2 = 5 \neq 0$ er A inverterbar. Systemet har derfor et entydig likevektspunkt gitt ved

$$A^{-1}\Big(- \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Big) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Det assosierte homogene systemet har vi løst i a). Den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ av det inhomogene systemet blir derfor

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{2t} \left(-2\cos t, \cos t - \sin t\right) + C_2\, e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t) + (1, 0)$$

der C_1 og C_2 er reelle konstanter.

Initialbetingelsen $x_1(0) = x_2(0) = 0$ gir

$$C_1(-2, 1) + C_2(0, 1) + (1, 0) = (0, 0)\,,$$

dvs $C_1 = 1/2 = -C_2$. Dermed blir løsningen

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} e^{2t} \left(-2\cos t, \cos t - \sin t\right) - \frac{1}{2}\, e^{2t}(-2\sin t, \cos t + \sin t) + (1, 0)\,,$$

dvs

$$x_1(t) = e^{2t}(\sin t - \cos t) + 1, \quad x_2(t) = -e^{2t} \sin t\,.$$