MAT1012 - Våren 2011 - Oblig 2

Innleveringsfrist: torsdag 28/04 - 2011, innen kl 14.30.

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Besvarelsen leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i N.H. Abels hus innen fristen. Husk å fylle ut og vedlegge forsiden med navn osv som du kan laste ned via oblig-siden på hjemmesiden til emnet.

Det vises ellers til det generelle regelverket for obligatoriske oppgaver, som også er tilgjengelig på oblig-siden.

Oppgave 1

I et land har man foretatt med fem års mellomrom en opptelling av antall mennesker som bor på landsbygda. Tallene (med 1 million som enhet) for de seks siste opptellingene er :

1985 : 2.59 1990 : 2.42 1995 : 2.27 2000 : 2.08 2005 : 1.95 2010 : 1.81

For $j = 1, 2, \ldots, 6$, la $x_j = j$ svarer til år $1980 + 5j$ (så $x_1 = 1$ svarer til 1985, $x_2 = 2$ svarer til 1990, osv.) og la y_j angi det tilsvarende antall mennesker som da bor på landsbygda.

a) Dataene ovenfor tyder på at det kan være en tilnærmet lineær sammenheng mellom x_j-ene og y_j-ene, alstå at vi tilnærmet kan skrive at $y_j = a\,x_j + b$. Bruk minste kvadraters metode til å bestemme a og b.

b) La oss anta at trenden som disse dataene viser fortsetter i fremtiden. Bruk a) til å anslå antall mennesker som vil bo på landsbygda i 2025 i dette landet.

Oppgave 2

Hvis $f(x)$ er en (deriverbar) funksjon i en variabel, har vi sett (i kap. 3 i Sletsjøes kompendium) at den lineære approksimasjonen til $f(x)$ rundt $x = 0$ er gitt ved $L(x) = f(0) + f'(0)\,x$. Grafen til $y = L(x)$ i xy-planet er da en rett linje som tangerer grafen til $y = f(x)$ i punktet $(0, f(0))$.

Tilsvarende, hvis $f(x, y)$ er en (deriverbar) funksjon av to variable, kan vi definere *den lineære approksimasjonen til* $f(x, y)$ *rundt* $(x, y) = (0, 0)$ ved

$$L(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)\,,$$

med andre ord ved

$$L(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\,.$$

Grafen til $z = L(x,y)$ blir da et plan i xyz-rommet som tangerer grafen til $z = f(x,y)$ i punktet $(0,0,f(0,0))$. Hvis (x,y) ligger nær $(0,0)$ kan vi finne en approksimativ verdi av $f(x,y)$ ved å beregne $L(x,y)$.

a) Betrakt nå $f(x,y) = (1+\sin(2x))\,e^{x+y}$. Finn den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ rundt $(x,y) = (0,0)$.

b) Bruk a) til å finne en en approksimativ verdi av $f(0.05,\,0.1)$. Sammenlikn ditt svar med det du får når du beregner $f(0.05,\,0.1)$ ved hjelp av en kalkulator.

Oppgave 3

Betrakt et (deriverbart) vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y),\, Q(x,y)\big)$ i planet.

Vi kan da definere *den lineære approksimasjonen til* $\mathbf{F}(x,y)$ *rundt* $(0,0)$ ved

$$\mathbf{L}(x,y) = \begin{bmatrix} P(0,0) + \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)\,y \\ \\ Q(0,0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)\,y \end{bmatrix}$$

dvs

$$\mathbf{L}(x,y) = \mathbf{F}(0,0) + \mathbf{F}'(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

der $\quad \mathbf{F}'(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial P}{\partial y}(0,0) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix}.$

Sett nå $\mathbf{F}(x,y) = \Big((1+\sin(2x))\,e^{x+y}\,,\,(x+1)^2(y+1)\Big)\,.$

a) Beregn den lineære approksimasjonen $\mathbf{L}(x,y)$ til $\mathbf{F}(x,y)$ rundt $(0,0)$.

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og til $\mathbf{L}$ i $(0,0)$ og sjekk at disse er like.

La så $r > 0$ og la C være sirkelen i xy-planet som kan parametriseres ved $x(t) = r\cos t$, $y(t) = r\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Dersom r er liten kan vi beregne linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C approksimativt ved å beregne linjeintegralet til $\mathbf{L}$ langs C.

c) Beregn $\int_C \mathbf{L}\cdot\mathbf{T}_C\,ds$. Hvis r er liten, hva blir $\frac{1}{\pi r^2}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_C\,ds$ (tilnærmet)?

Oppgave 4

Grethe er nøye med hva hun spiser og drikker. I sitt kjøleskap pleier hun å ha appelsinjuice (A), lettmelk (L) og grapefruktjuice (G). Følgende tabell angir innholdet av proteiner, karbohydrater og fett i disse drikkene, målt i antall gram per dl veske:

	A	L	G
Protein	1	3	0.6
Karbohydrater	10	5	11
Fett	0.5	1.5	0.2

Grethe lurer på om det er mulig å finne ut hvor mye av hvert slag hun må drikke dersom hun ønsker å få i seg nøyaktig p gram proteiner, k gram karbohydrater og f gram fett.

a) Sett opp problemet som en vektorlikning og på matriseform $M\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$ der $\mathbf{x} = (a, \ell, g)$ er "drikke-vektoren" og $\mathbf{y} = (p, k, f)$.

b) Begrunn at M er inverterbar og beregn M^{-1}. Angi et uttrykk for a, ℓ og g når p, k og f er fastsatt på forhånd.

c) Regn ut hva a, ℓ og g må være for å gi $p = 15$, $k = 100$ og $f = 7$. Hva skjer dersom Grethe ønsker å få til $p = 15$, $k = 100$ og $f = 8$?