Prøveeksamen, midtveis, våren 2011

Oppgave 1. Finn Taylorpolynomet av grad 4 til funksjonen

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

utviklet om $x = 0$.

Oppgave 2. Finn de tre kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^2y^2 - 3y^3 - 4x^2$$

Oppgave 3. Hva slags kritisk punkt er punktet $(1, 1)$ for funksjonen

$$f(x, y) = x^2 \cos(\pi y) + 2ye^{x-1} - 2y$$

Oppgave 4. En funksjon $y = f(x)$ er løsning av differensiallikningen $y' = 1 - xy$ med initialbetingelsen $f(0) = 1$. Finn Taylorpolynomet til f av grad 3.

Oppgave 5. En av disse matrisene har lineært uavhengige kolonnevektorer. Hvilken ?

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \; M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6. La $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være lineæravbildningen som roterer alle vektorer i xy-planet med en vinkel $\frac{\pi}{2}$ om origo og mot klokka. Skriv opp standardmatrisen til R.

Oppgave 7. Hvor stort er arealet til parallellogrammet $\mathcal{P}$ i xy-planet med hjørner i punktene $(1, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ og $(2, 0)$?

Oppgave 8. Vis at matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ er inverterbar og finn A^{-1}.

Oppgave 9. Betrakt

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Begrunn at $\mathbf{b}$ kan skrives som en lineær kombinasjon av vektorene $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$. Finnes det flere måter å gjøre dette på ? (Begrunn svaret).

b) Er $\mathbb{R}^3$ utspent av $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? (Begrunn svaret).

c) Sett $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$. Bestem en basis for Nul A.

Oppgave 10. Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (y\cos(xy) + e^y, x\cos(xy) + xe^y)$$

a) Vis at vektorfeltet er konservativt.

b) Finn en potensialfunksjon for vektorfeltet.