Vi skal se på et eksempel der vi regner ut begge sidene i Greens teorem, som forelest den 10. mai 2012.

Vi lar vektorfeltet være gitt ved $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (xy, x+y)$, og vi skal integrere det over området D, gitt som første kvadrant av enhetsdisken i planet, dvs. i kartesiske koordinater, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, eller i polarkoordinater, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$. Randa til D, dvs. den lukkede kurven som omslutter D er gitt med tre deler, segmentet langs x-aksen; $\mathbf{r}_1(t) = (t,0)$, $0 \leq t \leq 1$ med $\mathbf{r}_1'(t) = (1,0)$, sirkelbuen $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ med $\mathbf{r}_2'(t) = (-\sin t, \cos t)$ og segmentet langs y-aksen, $\mathbf{r}_3(t) = (0, 1-t)$, $0 \leq t \leq 1$, med $\mathbf{r}_3'(t) = (0,-1)$.

Venstresiden i Greens teorem ser da ut som

$$
\begin{aligned}
\oint_C P dx + Q dy &= \int_0^1 P(t,0)x_1'(t) + Q(t,0)y_1'(t)\ dt \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} P(\cos t, \sin t)x_2'(t) + Q(\cos t, \sin t)y_2'(t)\ dt \\
&\quad + \int_0^1 P(0,1-t)x_3'(t) + Q(0,1-t)y_3'(t)\ dt \\
&= \int_0^1 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t)\ dt \\
&\quad + \int_0^1 0 \cdot 0 + (1-t)(-1)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos t)\ dt + \int_0^1 t - 1\ dt \\
&= [-\frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\frac{1}{2}t^2 - t]_0^1 \\
&= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Vi har $curl(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x$ som gir høyresiden

$$
\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \iint_D 1 - x\, dx\, dy
$$

Området D er både type 1 og type 2, vi skal beregne integralet som et type 1-integral. Som nevnt tidligere er området gitt ved $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, og vi har

$$
\begin{aligned}
\iint_D 1 - x\, dx\, dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x\, dy dx \\
&= \int_0^1 [y - xy]_0^{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\, dx \\
&= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx
\end{aligned}
$$

Det første integralet gir presis arealet mellom x-aksen og grafen til $y = \sqrt{1-x^2}$, dvs. arealet av D. Dette er en kvart sirkelskive med radius 1, og areal $\frac{\pi}{4}$. Det andre integralet løser vi ved å substituere $u = 1 - x^2$, med $du = -2x\,dx$. Det gir

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{-2}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Setter vi dette inn i integralet får vi

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - x\,dx\,dy &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - [-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Vi kan også beregne dette integralet ved å bruke polarkoordinater, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$. For polarkoordinater har vi alltid $dx\,dx = r\,dr\,d\theta$. Med $x = r\cos\theta$ gir det

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - x\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r\cos\theta)\,r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r - r^2\cos\theta)\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^1 [r\theta - r^2\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dr \\ &= \int_0^1 (r\frac{\pi}{2} - r^2)\,dr \\ &= [\frac{1}{2}r^2\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}r^3]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Det fabelaktige med Greens teorem illustreres godt av dette eksemplet, vi beregner to forskjellige integraler, ett linjeintegral og ett dobbeltintegral. Det er vanskelig å se at disse to utregningene skal gi samme svar, men det gjør det altså.