Eksamen MAT 1012, tirsdag 12. juni 2012

Løsningsforslag

Oppgave 1

Vi har gitt tre vektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ i $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) La A være 3×3 matrisen som har $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ som sine søylevektorer. Vis at A ikke er inverterbar, og finn en basis for vektorrommet $U = \mathit{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Finn også en basis for nullrommet $\mathit{Nul}(A)$ til A.

Løsning. Vi har

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og regner ut at $\det A = 0$. Matrisen A er derfor ikke invertibel. Det er lett å se at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige. Siden determinanten til A er 0, vil søylevektorene danne en lineært avhengig mengde. De to vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ utgjør derfor en basis for U. Nullrommet må ha dimensjon 3-2=1, og vi finner et basis-element ved å løse

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

f.eks.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

b) Vektoren $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}$ er en kompleks egenvektor for A. Finn den komplekse egenverdien som $\mathbf{z}$ tilhører. Angi deretter de andre (reelle eller komplekse) egenverdiene til A sammen med de tilhørende egenvektorene.

Løsning. Vi har

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -3-i \\ -1+i \end{pmatrix} = (1+i) \begin{pmatrix} 1 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}$$

Komplekse egenverdier opptrer alltid i konjugerte par, så $1-i$ er også en egenverdi, og egenvektoren er den konjugerte av egenvektoren til $1+i$, dvs. $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2-i \\ -i \end{pmatrix}$.

I tillegg vet vi fra oppgave a) at 0 er en egenverdi med egenvektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\square$

c) Finn en kompleks 3×3 inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ blir en diagonal kompleks 3×3 matrise.

Løsning. Matrisen P har som sine søyler de tre egenvektorene til A, dvs

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2+i & -2-i \\ -1 & i & -i \end{pmatrix}$$

$\square$

Oppgave 2

La Ω betegne området i xy-planet som begrenses av trekanten med hjørner i $(0,0), (4,0)$ og $(0,2)$.

a) Beregn dobbeltintegralene

$$\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy \quad \text{og} \quad \iint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy$$

og bruk disse til å finne koordinatene til tyngdepunktet til Ω.

Løsning. Vi kan gi Ω som et type 2-område ved $0 \le y \le 2$, $0 \le x \le 4-2y$. Det gir

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} x\,dx\,dy = \int_0^2 [\frac{1}{2}x^2]_0^{4-2y}\,dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2}(4-2y)^2\,dy = \int_0^2 8 - 8y + 2y^2\,dy \\ &= [8y - 4y^2 + \frac{2}{3}y^3]_0^2 = 16 - 16 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Omega} y\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} y\,dx\,dy = \int_0^2 [xy]_0^{4-2y}\,dy \\ &= \int_0^2 (4-2y)y\,dy = \int_0^2 4y - 2y^2\,dy \\ &= [2y^2 - \frac{2}{3}y^3]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

Siden arealet av trekanten er $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$, får vi $\overline{x} = \frac{1}{4}\frac{16}{3} = \frac{4}{3}$, og $\overline{y} = \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3}$.

$\square$

Et vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2y + xy + x^2, 2x + 5y + \frac{1}{2}y^2 + 1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

La C betegne randkurven til området Ω, som vi gjennomgår i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra).

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs C. Er $\mathbf{F}$ konservativt?

Løsning. Vi har

$$\begin{aligned} curl(\mathbf{F}) &= \frac{\partial(2x + 5y + \frac{1}{2}y^2 + 1)}{\partial x} - \frac{\partial(2y + xy + x^2)}{\partial y} \\ &= 2 - (2 + x) = -x \neq 0 \end{aligned}$$

Så feltet er ikke konservativt. Vi bruker Greens teorem til å beregne linjeintegralet, vi har

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, ds &= \iint\limits_{\Omega} curl(\mathbf{F}) \, dx \, dy \\ &= -\iint\limits_{\Omega} x \, dx \, dy \\ &= -\overline{x} \cdot areal(\Omega) = -\frac{4}{3} \cdot 4 = -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

□

Oppgave 3

Et annet vektorfelt i xy-planet er gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y) = (x - y - 1, 3x + 5y + 1), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

a) Betrakt $\mathbf{G}$ som en avbildning fra $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Vektorfeltet $\mathbf{G}$ kan skrives påformen $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, for en 2×2 matrise A og en $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Angi A og $\mathbf{b}$. Begrunn deretter at A er diagonaliserbar og angi en inverterbar matrise P som diagonaliserer A.

Løsning. Vi har

$$\mathbf{G}(x,y) = (x - y - 1, 3x + 5y + 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

er invertibel siden $\det A = 1 \cdot 5 - (-1)3 = 8 \neq 0$. Vi finner egenverdier og egenvektorer til A ved å sette

$$\det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) - (-1) \cdot 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

som gir $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 4$, og egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

og dermed

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$\square$

b) Anta at en deriverbar vektorvaluert funksjon $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tilfredstiller $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{G}(\mathbf{r}(t))$ for alle $t \in \mathbb{R}$ samt initialbetingelsen $\mathbf{r}(0) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$. Finn $x(t)$ og $y(t)$ der $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Løsning. Vi finner først likevektspunktet ved å sette $x - y - 1 = 3x + 5y + 1 = 0$. Det gir $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$. Dernest løser vi det homogene systemet og finner en generelle løsningen ved å legge denne til likevektspunktet.

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{4t} + \frac{1}{2}$$
$$y(t) = -Ae^{2t} - 3Be^{4t} - \frac{1}{2}$$

For å finne den spesielle løsningen setter vi inn for initialbetingelsen og løser likningssystemet

$$\frac{3}{2} = x(0) = Ae^0 + Be^0 + \frac{1}{2} = A + B + \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = y(o) = -Ae^0 - 3Be^0 - \frac{1}{2} = -A - 3B - \frac{1}{2}$$

som gir $A = 2$, $B = -1$, og

$$x(t) = 2e^{2t} - e^{4t} + \frac{1}{2}$$
$$y(t) = -2e^{2t} + 3e^{4t} - \frac{1}{2}$$

$\square$