

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1030 — Diskret matematikk.

Eksamensdag: Mandag 6. desember 2004.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Finn en endelig tilstandsmaskin over alfabetet $\{a, b, c\}$ som aksepterer et ord w hvis og bare hvis w ikke inneholder abc som et delord.

Oppgave 2.

La a_1, \dots, a_{25} være positive hele tall slik at

$$\sum_{k=1}^{25} a_k < 50.$$

Vis at det finnes $i \leq j \leq 25$ slik at

$$\sum_{k=i}^j a_k = 25.$$

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

- a) Finn alle tallfølger $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ som tilfredstiller rekurrensrelasjonen

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}.$$

- b) Et jernbaneselskap eier tre typer vogner med fire hjulpar og to typer vogner med to hjulpar, samt en type lokomotiv.

Finn et uttrykk for hvor mange forskjellige tog selskapet kan sette opp, når et tog består av lokomotiv og av vogner med tilsammen 50 hjulpar.

- c) Vi ser at

$$4|(3+1), 4|(3^2-1), 4|(3^3+1) \text{ og } 4|(3^4-1).$$

Formuler en generell påstand basert på denne observasjonen.

Vis påstanden ved induksjon og bruk påstanden til å vise at svaret du fikk i b) er et helt tall.

Oppgave 4.

Vi definerer en relasjon R på potensmengden til $\{1, 2, 3\}$ ved

$$ARB \Leftrightarrow \text{det finnes en en-til-en (injektiv) funksjon } f : A \rightarrow B \text{ slik at } a \leq f(a) \text{ for alle } a \in A.$$

Vis at R er en partiell ordning og tegn Hasse-diagrammet til R .

Oppgave 5.

En *preordning* er en relasjon R på en mengde X som er refleksiv og transitiv (men ikke nødvendigvis antisymmetrisk). Hvis R er en preordning, definerer vi relasjonen \tilde{R} ved

$$a\tilde{R}b \Leftrightarrow aRb \wedge bRa.$$

Vis at \tilde{R} vil være en ekvivalensrelasjon.

Et eksempel på en preordning på mengden av hele tall ≥ 2 er

$$aRb \Leftrightarrow \text{ethvert primtall som er en faktor i } a \text{ er også en faktor i } b.$$

Finn to forskjellige tall som er \tilde{R} -ekvivalente. Beskriv ekvivalensklassen til 32.

SLUTT