

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1030 — Diskret matematikk.

Eksamensdag: Tirsdag 31. mai 2005.

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av tilsammen 10 punkter, fra 1(a) til 4(b), som alle har lik vekt.

Oppgave 1.

For hvert naturlig tall n la

$$t(n) = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}.$$

(a) Beregn $t(n)$ for $n = 1, 2$ og 3 .

(b) Vis at

$$t(n+1) = \frac{4n+2}{n+1} t(n)$$

for alle $n \geq 1$.

(c) Gi et induksjonsbevis for at

$$t(n) \leq 4^n$$

for alle $n \geq 1$. Hint: Bruk at $4n+2 \leq 4(n+1)$. Forklar både starten på induksjonen og induksjonstrinnet.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

En sammenhengende graf har 5 hjørner og 8 kanter. De fire første hjørnene har grad 1, 2, 3 og 4.

- Hva er graden til det femte hjørnet?
- Er denne grafen et tre?
- Finnes det en Eulervei i denne grafen?

Oppgave 3.

En enkel (engelsk: simple) vektet graf G med hjørner A, B, C, D, E og F har følgende vektmatrise:

	A	B	C	D	E	F
A	0	66	∞	38	∞	11
B	66	0	73	∞	13	∞
C	∞	73	0	42	∞	20
D	38	∞	42	0	91	∞
E	∞	13	∞	91	0	93
F	11	∞	20	∞	93	0

F.eks. er det en kant AB mellom A og B , med vekt 66, mens det ikke er noen kant i G mellom A og C .

- Tegn et bilde av denne grafen, der hjørnene er merket A til F og hver kant $AB, AD, \text{etc.}$ er merket med den tilhørende vekten.
Hint: Noen av kantene må krysse hverandre i dette bildet. Tegn opp grafen en gang til for å besvare 3(b).
- Bruk Prims algoritme til å finne et minimalt utspennende tre (engelsk: minimal spanning tree) T for G . Svaret skal være en liste av de kantene i G som er med i T , der f.eks. kanten mellom A og B heter AB .

Oppgave 4.

- La $m = 72$ og $x = 7$. Bruk Euklids algoritme til å finne deres største felles faktor $\text{gcd}(m, x)$.
- La fortsatt $m = 72$ og $x = 7$. Finn et helt tall y slik at $xy = 1 \pmod{m}$.
Hint: Bruk mellomregningene fra 4(a).

SLUTT