UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1030 — Diskret Matematikk
Eksamensdag:	9. juni, 2009
Tid for eksamen:	09:00 – 12:00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert punkt er gitt en poengsum. Maksimalt oppnåelige poengsum er 100.

Oppgave 1 Mengdelære og relasjoner

La $\sim$ være en relasjon på $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ som er definert ved at $x \sim y$ hvis $x + y$ er et partall. Avgjør om relasjonen har de følgende egenskapene. Hvert svar skal begrunnes.

(a) [3 poeng] Refleksiv
(b) [3 poeng] Symmetrisk
(c) [3 poeng] Transitiv
(d) [3 poeng] Irrefleksiv
(e) [3 poeng] Anti-symmetrisk

Oppgave 2 Funksjoner

For hver egenskap under, definer en funksjon som har denne egenskapen. Velg definisjons- og verdiområdene blant mengdene $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{a, b, c, d\}$ og $C = \{x, y, z\}$.

(a) [3 poeng] Injektiv, men ikke surjektiv
(b) [3 poeng] Surjektiv, men ikke injektiv
(c) [3 poeng] Injektiv og surjektiv, men ikke identitetsfunksjonen
(d) [3 poeng] Hverken injektiv eller surjektiv
(e) [3 poeng] Hvis noen av funksjonene har en invers, oppgi denne.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 Utsagnslogikk

La F være formelen

$$p \rightarrow (q \vee r),$$

og la G være formelen

$$(p \vee q) \rightarrow r,$$

hvor p, q og r er utsagnsvariable.

(a) [3 poeng] Sett opp sannhetsverditabeller for de to formlene.
Bruk disse sannhetsverditabellene for å besvare de neste tre spørsmålene, og begrunn svarene ved å vise til de relevante egenskapene ved sannhetsverditabellene.

(b) [3 poeng] Er $F \rightarrow G$ en tautologi?

(c) [3 poeng] Er $G \rightarrow F$ en tautologi?

(d) [3 poeng] Er F og G ekvivalente?

(e) [3 poeng] Gi en formel som er ekvivalent med F, men som *kun* inneholder konnektivene $\neg$ og $\wedge$.

Oppgave 4 Induksjon

[15 poeng] Gi et induksjonsbevis for at følgende formel holder for alle n i $\mathbb{N}_0$:

$$5 + 9 + 13 + \cdots + (4n + 5) = 2n^2 + 7n + 5$$

Oppgave 5 Kombinatorikk

(a) [5 poeng] Hvor mange ord kan man skrive ved hjelp av bokstavene i *RABARBRA*? Forklar kort hvordan du regner ut svaret.

(b) [5 poeng] Hvor mange grupper av størrelse 4 fins det i en forsamling på 7 mennesker? Forklar kort hvordan du regner ut svaret.

Oppgave 6 Kompleksitetsteori

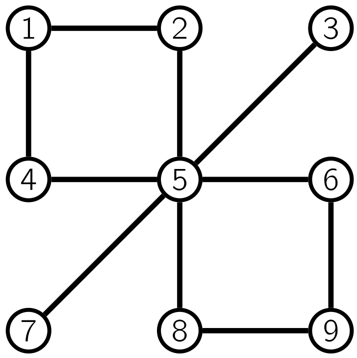
La $f(n) = 4n^2$ og $g(n) = n^3$.

(a) [7 poeng] Vis at f er $O(g)$

(b) [8 poeng] Vis at g *ikke* er $O(f)$

Oppgave 7 Grafteori

La G være følgende graf.



Besvar hvert av følgende spørsmål. Oppgi stier og kretser som sekvenser $a_1 a_2 \ldots a_k$, hvor hver a_i er navnet på en node i grafen.

(a) [3 poeng] Har grafen en Eulersti? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(b) [3 poeng] Har grafen en Eulerkrets? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(c) [3 poeng] Har grafen en Hamiltonsti? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.

(d) [3 poeng] Er grafen enkel? Begrunn svaret ditt.

(e) [3 poeng] Forklar kort hvorfor grafen ikke er et tre.