UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1030 — Diskret Matematikk.
Eksamensdag:	Mandag 7. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert punkt er gitt en poengsum. Maksimalt oppnåelig poengsum er 100.
Alle svar skal begrunnes.

Oppgave 1 (vekt 16 poeng)

En av de tre påstandene under vil alltid holde, mens de to andre ikke gjør det.
Bestem hvilken som er korrekt og finn moteksempler til de to andre:

1. $A \cap \overline{B} \subseteq (A \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})$
2. $A \cap (B \cup C) \subseteq B \cap (A \cup C)$
3. $(\overline{A} \cup B) \cap C \subseteq (A \cup \overline{B}) \cap C$

Oppgave 2 (vekt 8 poeng)

Finn et generelt uttrykk for alle funksjoner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som oppfyller likningen

$$f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n)$$

for alle naturlige tall n.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 (vekt 12 poeng)

La $g(n) = 3n^2 + 3n + 2$ for alle $n \in \mathbb{N}_0$ og la

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k) = g(0) + \cdots + g(n-1)$$

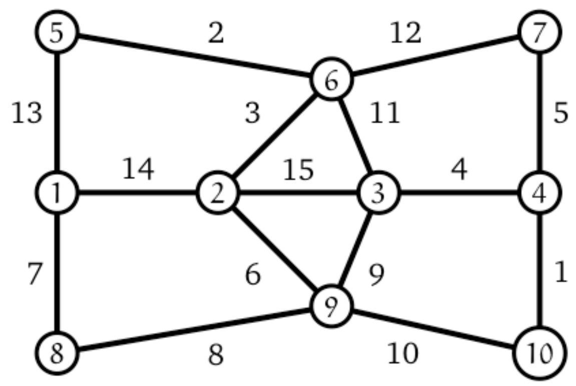
for alle $n \in \mathbb{N}$.
Bruk induksjon på n, og vis at

$$f(n) = n^3 + n$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 4

La G være den vektede grafen



a) [6 poeng] Har G en Eulerkrets eller en Eulersti?

b) [8 poeng] Finn det minste utspennende treet (spanning tree) i G.

c) [8 poeng] Bruk Dijkstras algoritme til å finne et utspennende tre i G som gir minst avstand fra hver enkelt node til node 2. Angi i hvilken rekkefølge du legger kanter til treet. Finnes det flere løsninger?

Oppgave 5

a) [6 poeng] Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved hjelp av bokstavene i ordet

TATTOO

b) [8 poeng] Et fotball-lag på 11 spillere skal velge ut fem av spillerne som etter tur skal delta i en straffespark-konkurranse.
Hvor mange forskjellige valg finnes det?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6 (vekt 16 poeng)

La L være det formelle språket av ord i alfabetet

$$\{0, 1, x, y, +, *, (,)\}$$

definert ved

1. $0 \in L$, $1 \in L$, $x \in L$ og $y \in L$.
2. Hvis s og t er ord i L er også $(s + t)$ og $(s * t)$ i L.

Bestem om de to uttrykkene

$$((1 + y) * x) * ((1 * 0) * x)$$

og

$$((1 + 0) * x) * ((1 * 0) * (y + 1))$$

lar seg unifisere, det vil si, om vi kan erstatte x og y med andre ord fra L slik at de to uttrykkene blir like.
I så fall, finn den mest generelle unifiseringen, tegn syntakstreet og skriv termen med prefix (forlengs polsk) notasjon.

Oppgave 7 (vekt 12 poeng)

Vi er gitt pseudokoden

1. *Input* n [$n > 0$ heltall på binær form.]
2. $k \leftarrow 0$
3. **while** n partall **do**

   3.1 $n \leftarrow \frac{n}{2}$

   3.2 $k \leftarrow k + 1$
4. *output* k
5. *output* n

La m være antall sifre i binærrepresentasjonen av n.
Bruk O-notasjonen til å beskrive kompleksiteten av denne algoritmen som funksjon av m.

SLUTT