Eksamen MAT1030 07.06.2010

Løsningsforslag

Oppgave 1 For mange vil den naturlige måten å løse denne oppgaven på være å bruke Venn-diagram.

1. er alltid riktig: Vi har at
$$A \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$
Siden
$$A \cap \overline{B} \cap C \subseteq A \cap \overline{B}$$
og
$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \subseteq A \cap \overline{C}$$
følger 1.
2. La $A = C = \{0\}$ og $B = \emptyset$. Det gir et moteksempel.
3. La $B = C = \{0\}$ og $A = \emptyset$. Det gir et moteksempel.

Oppgave 2 Den karakteristiske likningen er
$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$
som har en multippel rot $x = 2$.
Det gir den generelle løsningen
$$f(n) = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n.$$

Oppgave 3 For $n = 1$ har vi både at
$$f(n) = g(0) = 2$$
og at
$$n^3 + n = 1 + 1 = 2.$$
Påstanden holder derfor for $n = 1$. Hvis vi antar at påstanden holder for n bruker vi at
$$(n+1)^3 + (n+1) - (n^3 + n) = 3n^2 + 3n + 2 = g(n)$$
til å vise at påstanden også holder for $n + 1$.
Dermed er påstanden vist ved induksjon.

Oppgave 4

a) Vi ser at nodene 5, 7, 8 og 10 har grad 2, nodene 1 og 4 har grad 3 og nodene 2, 3, 4 og 9 har rad 4.
Det gir at det finnes en Eulersti, men ingen Eulerkrets.

b) Ved Kruskals algoritme (gjennomgått på forelesningene) vil vi bygge opp det utspennende treet ved å legge til følgende kanter i rekkefølge:

$$(10,4),(5,6),(6,3),(3,4),(4,7),(2,9),(1,8),(8,9),(9,13).$$

Prims algoritme vil gi det samme treet uansett hvor vi starter.

c) Rekkefølgen ved bruk av av Dijkstras algoritme vil avhenge av i hvilken rekkefølge vi lister kantene.
En løsning vil være å legge kantene i det utspennende treet i følgende rekkefølge:

$$(2,6),(6,5),(2,9),(2,1),(9,8),(6,3),(6,7),(9,10),(10,4).$$

Løsningen er entydig, det finnes bare et mulig tre. Når vi bygger ut treet, vil vi aldri ha et valg hvor alternativene ekskluderer hverandre.

Oppgave 5

a) Vi har

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!}=60$$

muligheter.

b) Vi har

$$\frac{11!}{6!}=55440$$

mulige valg.

Oppgave 6 I to trinn ser vi at unifisering av de to gitte termene krever simultan unifisering av følgende fire par

$1+y$ og $1+0$

x og x

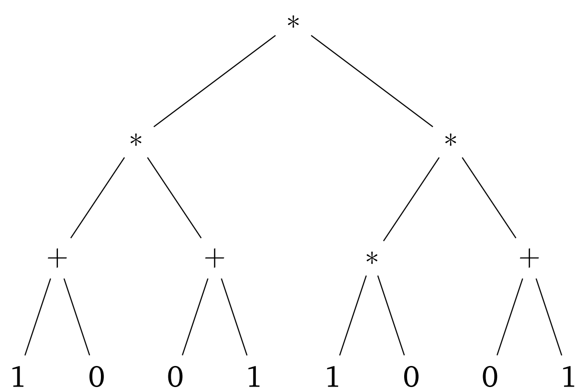
$1 * 0$ og $1 * 0$

x og $y + 1$

Dette er mulig hvis vi setter inn 0 for y og $0 + 1$ for x.
Den mest generelle unifiserte termen blir da

$$((1 + 0) * (0 + 1)) * ((1 * 0) * (0 + 1)).$$

Syntakstreet:



Hvis vi bruker prefix notasjon får vi

$$* * +10 + 01 * *10 + 01.$$

Oppgave 7 Når vi deler et binært tall på 2 reduserer vi lengden av representasjonen med 1. I det værste tilfellet vil vi derfor benytte while-løkka m ganger.
I selve while-løkka ser vi på siste siffer en gang, og eventuelt fjerner det. Det betyr at kompleksiteten av hvert enkelt skritt i løkka ikke avhenger av størrelsen på input.
Det gir videre at kompleksiteten er

$$\mathrm{O}(m).$$