Løsningsforslag til eksamen i MAT1030, våren 2009

1 Mengdelære og relasjoner

La $\sim$ være en relasjon på $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ som er definert ved at $x \sim y$ hvis $x + y$ er et partall. Avgjør om relasjonen har de følgende egenskapene. Hvert svar skal begrunnes.

(a) [3 poeng] Refleksiv
JA, relasjonen er refleksiv. La x være et vilkårlig tall i $\mathbb{N}$. Da vil $x + x$ være et partall og da vil $x \sim x$ være sann. Siden x var vilkårlig valgt, vil $x \sim x$ være sann for alle x i $\mathbb{N}$, og dermed er $\sim$ refleksiv.

(b) [3 poeng] Symmetrisk
JA, relasjonen er symmetrisk. Anta at $x \sim y$. Da vil $x + y$ være et partall. Siden $x + y = y + x$, vil også $y + x$ være et partall, og dermed vil $y \sim x$.

(c) [3 poeng] Transitiv
JA, relasjonen er transitiv. Anta at $x \sim y$ og $y \sim x$. Da vil $x + y$ og $y + z$ være partall. Anta at $x + y = 2m$ og at $y + z = 2n$, for passende m og n. Da vil $(x + y) + (y + z) = 2m + 2n$, og det følger at $x + z = 2m + 2n - 2y$, og dermed må $x + z$ også være et partall, og $x \sim z$.

(d) [3 poeng] Irrefleksiv
NEI, relasjonen er ikke irrefleksiv. Et enkelt moteksempel som viser dette er at $1 \sim 1$.

(e) [3 poeng] Anti-symmetrisk
NEI, relasjonen er ikke anti-symmetrisk. Et enkelt moteksempel som viser dette er at $1 \sim 3$ og $3 \sim 1$, men det er ikke tilfellet at $1 = 3$.

2 Funksjoner

For hver egenskap under, definer en funksjon som har denne egenskapen. Velg definisjons- og verdiområdene blant mengdene $A = \{1, 2, 3, 4\}$ og $B = \{a, b, c, d\}$ og $C = \{x, y, z\}$.

(a) [3 poeng] Injektiv, men ikke surjektiv
La $f : C \to A$ slik at $f(x) = 1$, $f(y) = 2$ og $f(z) = 3$.
Den er ikke surjektiv, siden det ikke fins noen w i C slik at $f(w) = 4$.

(b) [3 poeng] Surjektiv, men ikke injektiv
La $f : A \to C$ slik at $f(1) = x$, $f(2) = y$, $f(3) = z$, $f(4) = x$ og $f(5) = y$.
Den er ikke injektiv, siden $f(1) = f(4) = x$.

(c) [3 poeng] Injektiv og surjektiv, men ikke identitetsfunksjonen
La $f : A \to B$ slik at $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$ og $f(5) = e$.

(d) [3 poeng] Hverken injektiv eller surjektiv
La $f : C \to C$ slik at $f(x) = x$, $f(y) = x$ og $f(z) = x$.
Den er ikke surjektiv, siden det ikke fins noen w i C slik at $f(w) = y$.
Den er ikke injektiv, siden $f(x) = f(y) = x$.

(e) [3 poeng] Hvis noen av funksjonene har en invers, oppgi denne.
Den eneste funksjonen med en invers er den fra (c), og inversen er $f^{-1} : B \to A$ slik at $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$ og $f(e) = 5$.

3 Utsagnslogikk

La F være formelen

$$p \to (q \vee r),$$

og la G være formelen

$$(p \vee q) \to r,$$

hvor p, q og r er utsagnsvariable.

(a) [3 poeng] Sett opp sannhetsverditabeller for de to formlene.

p	q	r	p	$\to$	$(q \vee r)$	$(p \vee q)$	$\to$	r
T	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
T	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
T	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**
F	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**	**T**	**T**	**T**
F	**T**	**F**	**F**	**T**	**T**	**T**	**F**	**F**
F	**F**	**T**	**F**	**T**	**T**	**F**	**T**	**T**
F	**F**	**F**	**F**	**T**	**F**	**F**	**T**	**F**

(b) [3 poeng] Er $F \to G$ en tautologi?
NEI, for det fins en tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene, f.eks. den i rad 2, hvor F er sann, men hvor G er usann.

(c) [3 poeng] Er $G \to F$ en tautologi?
JA, for alle tilordninger av sannhetsverdier til utsagnsvariablene som gjør G sann (rad 1, 3, 5, 7 og 8), gjør også F sann.

(d) [3 poeng] Er F og G ekvivalente?
NEI, av samme grunn som i (b).

(e) [3 poeng] Gi en formel som er ekvivalent med F, men som *kun* inneholder konnektivene $\neg$ og $\wedge$.
En slik formel er $\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

4 Rekursjon/Induksjon

[15 poeng] Gi et induksjonsbevis for at følgende formel holder for alle n i $\mathbb{N}_0$:

$$5 + 9 + 13 + \cdots + (4n+5) = 2n^2 + 7n + 5$$

Induksjonsstarten er at likheten holder for $n = 0$. Ved innsetting får vi at $5 = 5$, som stemmer.

For induksjonssteget, anta at påstanden holder for $n = k$. Dette er induksjonshypotesen og kan skrives på følgende måte.

$$5 + 9 + 13 + \ldots + (4k+5) = 2k^2 + 7k + 5$$

Vi ønsker nå å vise at påstanden holder for $n = k+1$. Ved å begynne med høyresiden får vi følgende.

$$\begin{aligned} 2(k+1)^2 + 7(k+1) + 5 &= (2k^2 + 4k + 2) + (7k + 7) + 5 \\ &= 2k^2 + 7k + 5 + (4k + 9) \end{aligned}$$

Ved å anvende induksjonshypotesen kan vi erstatte $2k^2 + 7k + 5$ og få følgende uttrykk.

$$5 + 9 + 13 + \ldots + (4k + 5) + (4k + 9)$$

Og dette er lik venstresiden, som er følgende.

$$5 + 9 + 13 + \ldots + (4k + 5) + (4(k + 1) + 5)$$

Ved induksjon kan vi konkludere med at likheten holder for alle n i $\mathbb{N}_0$.

5 Kombinatorikk

(a) [5 poeng] Hvor mange ord kan man skrive ved hjelp av bokstavene i *RABARBRA*? Forklar kort hvordan du regner ut svaret.
Ordet *RABARBRA* består av 8 bokstaver, og det er 8! måter å stokke om bokstavene på, men man må ta høyde for at noen av bokstavene kan være like, og her er det 3 stk. *A*, 2 stk. *B* og 3 stk. *R*. Det er henholdsvis 3!, 2! og 3! måter å stokke om bokstavene innbyrdes på. For å regne ut det rette svaret, så må 8! deles på disse tallene.

$$\frac{8!}{3!2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

Det er altså 560 måter å stokke om bokstavene på.

(b) [5 poeng] Hvor mange grupper av størrelse 4 fins det i en forsamling på 7 mennesker? Forklar kort hvordan du regner ut svaret.
Vi kan bruke binomialkoeffisienten for å regne ut dette. Her uttrykker $\binom{n}{k}$ hvor mange delmengder av størrelse k det fins av en mengde av størrelse n.

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Det er derfor 35 slike grupper av størrelse 4.

6 Kompleksitetsteori

La $f(n) = 4n^2$ og $g(n) = n^3$.

(a) [7 poeng] Vis at f er $O(g)$
Vi må vise at det fins en c slik at for alle tilstrekkelig store n, så holder følgende ulikhet.

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Det enkleste er å velge $c = 4$. Da vil ulikheten holde for alle $n \geq 0$.
Alternativt kan man velge $c = 1$. Da vil ulikheten holde for alle $n \geq 4$.

(b) [8 poeng] Vis at g *ikke* er $O(f)$
For alle c må det finnes vilkårlig store n slik at følgende ulikhet *ikke* holder.

$$g(n) \leq c \cdot f(n)$$

Med andre ord, for alle c må det finnes vilkårlig store n slik at følgende ulikhet holder.

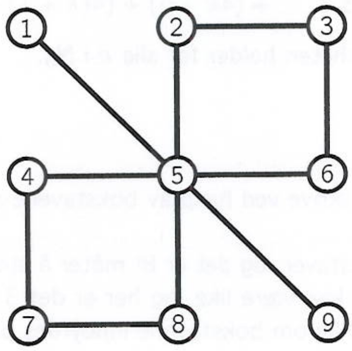
$$c \cdot f(n) < g(n)$$

For en gitt c, la $n > 4c$. Da får vi at denne ulikheten vil holde.

$$c \cdot f(n) = c \cdot 4n^2 < n^3 = g(n)$$

7 Grafteori

La G være følgende graf.



Besvar hvert av følgende spørsmål. Oppgi stier og kretser som sekvenser $a_1 a_2 \ldots a_k$, hvor hver a_i er navnet på en node i grafen.

(a) [3 poeng] Har grafen en Eulersti? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.
JA, stien 1 5236 5478 59 er en Eulersti.

(b) [3 poeng] Har grafen en Eulerkrets? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.
NEI, grafen har ingen Eulerkrets. Det er fordi det fins noder av odde grad i grafen, og vi vet at en Eulerkrets eksisterere nøyaktig når gradene til alle nodene er partall.

(c) [3 poeng] Har grafen en Hamiltonsti? Hvis den har det, gi et eksempel; hvis nei, forklar hvorfor ikke.
NEI, grafen har ingen Hamiltonsti. Det er fordi enhver sti som innehholder nodene 1, 2 og 4 er nødt til å inneholde node 5 minst to ganger, og en Hamiltonsti er en sti som inneholder hver node fra grafen nøyaktig én gang.

(d) [3 poeng] Er grafen enkel? Begrunn svaret ditt.
JA, ja grafen er enkel, fordi den ikke inneholder hverken løkker eller parallelle kanter.

(e) [3 poeng] Forklar kort hvorfor grafen ikke er et tre.
Grafen er ikke et tre fordi den inneholder en sykel, og det skal per definisjon ikke trær gjøre. En sykel er for eksempel 52365.