MAT 1030 - 6/12-04 - løsning

10. desember 2004

Dette er et forslag til hvordan eksamensoppgavene i MAT 1030, desember 2004, kan løses.
Det forutsettes at oppgavesettet er tilgjengelig.

Oppgave 1

Det gjelder å lage en maskin som passer på at bokstavrekken *abc* ikke leses. Maskinen vil ha fire tilstander

1. s_0 som er starttilstanden og markerer ingen fare.
2. s_1 som markerer at vi akkurat har lest en a.
3. s_2 som markerer at vi akkurat har lest ab
4. s_3 som markerer at vi har lest abc så alt er tapt.

Tilstandene s_0, s_1 og s_2 vil være aksepterende. Maskinen kan tegnes som ringer og piler eller på tabell-form.
Tabell-formen vil være

M	a	b	c
s_0	s_1	s_0	s_0
s_1	s_1	s_2	s_0
s_2	s_1	s_0	s_3
s_3	s_3	s_3	s_3

Oppgave 2

Hvis $0 \leq k \leq 25$, la b_k være summen av de k første a_i-ene.
For eksempel er $b_0 = 0$, $b_1 = a_1$, $b_2 = a_1 + a_2$ osv.
La $c_k = b_k \pmod{25}$. Da er $0 \leq c_k \leq 24$.
Siden vi har 26 tall c_k som bare kan ta høyst 25 verdier, sier skuffeprinsippet at vi må ha to tall $i < j$ slik at $c_i = c_j$. Det betyr at b_i og b_j er like modulo 25. Siden de ikke kan være like og avstanden er mindre enn 50, er avstanden nøyaktig 25.

Det betyr at

$$\sum_{k=i+1}^{j} a_k = 25.$$

Oppgave 3

a)
Den karakteristiske likningen er

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

som har løsninger $t = 3$ og $t = -1$.
Det betyr at den generelle løsningen er på formen

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n.$$

b)
Vi kan regne som om vogner med to hjulpar har lengde 1 og vogner med fire hjupar har lengde 2. Vi skal da se på antall mulige tog (hvor rekkefølgen av vognene spiller en rolle) hvor samlet lengde på vognene er 25.
Vi skal se at dette antallet vil oppfylle rekurrensrelasjonen fra a). La b_n være antall tog av lengde n.
$b_0 = 1$ ettersom det vognløse toget er det eneste mulige.
$b_1 = 2$ ettersom vi her har valget mellom to typer vogner med to hjulpar.
Hvis $n \geq 2$, er det to muligheter til å lage seg et tog av lengde n på.

1. Vi kan la siste vogn ha fire hjulpar. Da har vi tre valg for siste vogn og b_{n-2} mulige valg av toget foran.

2. Vi kan la siste vogn ha to hjulpar. Da har vi to valg for siste vogn og b_{n-1} mulige valg av toget foran.

Tilsammen gir det oss likningen $b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$. Vi finner de konkrete verdiene for A og B for denne følgen ved å sette inn initialverdiene for $n = 0$ og $n = 1$. Det gir likningene

$$A + B = 1$$

$$3A - B = 2$$

som gir $A = \frac{3}{4}$ og $B = \frac{1}{4}$.
Setter vi inn for $n = 25$ får vi

$$b_n = \frac{3^{26} + (-1)^{25}}{4}.$$

Dette kan skrives som $\frac{1}{4}(3^{26} - (-1)^{26})$.

c)
Den generelle påstanden er at 4 er faktor i $3^n - (-1)^n$.
For $n = 1$ ser vi at dette er riktig ved å sette inn og se at $3^1 - (-1)^1 = 4$ som har 4 som faktor.
Induksjonstrinnet går som følger:
Anta at 4 er faktor i $3^n - (-1)^n$.
Vi har at $3^{n+1} - (-1)^{n+1} = 3 \cdot 3^n + (-1)^n = 4 \cdot 3^n - (3^n - (-1)^n)$.
Det første leddet har opplagt 4 som faktor, og det andre leddet har 4 som faktor i følge induksjonsantagelsen. Derfor er $3^{n+1} - (-1)^{n+1}$ delelig med 4.

Setter vi inn $n = 26$ og deler på 4, får vi svaret på del b), så dette uttrykket bestemmer et heltall. (Dette fungerer som en kontroll på at vi regnet riktig i b).

Oppgave 4

For å vise at R er en partiell ordning, må vi vise at R er refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

- R er refleksiv fordi identitetsfunksjonen på en mengde A oppfyller betingelsen som sikrer at ARA.

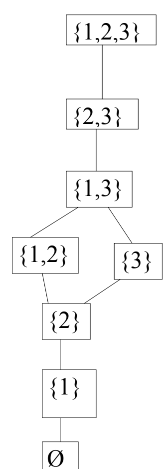
- R er transitiv, for hvis $f : A \to B$ og $g : B \to C$ er enentydige og oppfyller ordningskravet, vil sammensetningen $h(a) = g(f(a))$ både være enentydig og ha egenskapen

  $$h(a) = g(f(a)) \geq f(a) \geq a$$

  for alle a, så ARC.

- R er antisymmetrisk ved følgende argument: Anta $f : A \to B$ og $g : B \to A$ bevitner at ARB og BRA. La h være sammensetningen av g og f.
  Siden funksjonene begge veier er injektive, må A og B ha like mange elementer. Hvis både A og B er tomme, er de like. Anta at de ikke er tomme. Hvis for eksempel det største elementet a i A er større enn det største elementet i B, finnes det ingen mulig verdi for $f(a)$ i B. Argumentet er symmetrisk og viser at det største elementet i A også er det største elementet i B, og f og g må være identiteten på dette elementet.
  Hvis A og B har flere elementer kan vi resonnere på samme måten for de nest største elementene og eventuelt for de tredje største elementene.

Hasse-diagrammet blir:



Oppgave 5

For å vise at $\tilde{R}$ er en ekvivalensrelasjon, må vi vise at $\tilde{R}$ er refleksiv, symmetrisk og transitiv:

- Refleksiv: $a\tilde{R}a \Leftrightarrow aRa \wedge aRa$. Høyresiden holder fordi R er refleksiv. Derfor holder venstresiden også.
- Symmetrisk: Anta $a\tilde{R}b$. Da vil $aRb \wedge bRa$ og ved tautologi, $bRa \wedge aRb$. Det følger at $b\tilde{R}a$.
- Transitivitet: Anta $a\tilde{R}b$ og $b\tilde{R}c$. Fra de to første delene av konjunksjonene får vi at aRb og bRc og ved transitivitet av R får vi aRc. Ved å se på de andre delene får vi tilsvarende at cRa. Tilsammen gir det $a\tilde{R}c$.

For den gitte relasjonen, vil mengden av primtallsfaktorer (uten repetisjon) bestemme ekvivalensklassen til et tall. Derfor er for eksempel 3 og 9 ekvivalente og 18 og 12 er ekvivalente.
32 har bare 2 som primtallsfaktor, og er ekvivalent med alle tall som har bare 2 som primtallsfaktor.
Ekvivalensklassen blir

$$[32] = \{2^n \mid n \geq 1\}.$$