Fasit til avsluttende eksamen MAT 1030 våren 2005

Oppgave 1.

(a) $t(1) = 2$, $t(2) = 6$ og $t(3) = 20$.

(b)

$$t(n+1) = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{4n+2}{n+1} t(n) \, .$$

(c) For $n = 1$ er $t(1) = 2 \leq 4^1 = 4$ sant. Induktivt, anta at $t(n) \leq 4^n$ for en $n \geq 1$. Da er $t(n+1) = (4n+2/n+1)t(n) \leq 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}$. Så ulikheten holder også for $n+1$, og dermed for alle $n \geq 1$.

Oppgave 2.

(a) Summen av gradene er lik to ganger antallet kanter, så graden x til det siste hjørnet oppfyller $1 + 2 + 3 + 4 + x = 2 \times 8$, dvs. $x = 6$.

(b) Et tre med 5 hjørner har $5 - 1 = 4$ kanter, så nei, dette er ikke et tre.

(c) Grafen har bare to hjørner av odde grad, så ja, det finnes en Eulervei.

Oppgave 3.

(a) (En sekskant $ABCDEF$ med tre diagonale kanter.)

(b) Det minimale utspennende treet har kanter AF, CF, AD, AB og BE.

Oppgave 4.

(a) $\gcd(72, 7) = 1$.

(b) $y = 31$.

John Rognes
Oslo, 8. juni 2005