UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

UNDERVEISEKSAMEN I:	MAT1030 – DISKRET MATEMATIKK.
EKSAMENSDAG:	ONSDAG 16/3, 2005.
TID FOR EKSAMEN:	KL. 13.30–15.30.
VEDLEGG:	INGEN.
TILLATTE HJELPEMIDLER:	INGEN.

OPPGAVESETTET ER PÅ 3 SIDER.

KANDIDATNR. FASIT

Oppgavesettet består av 17 flervalgsoppgaver, hver med fire alternativer (A), (B), (C) og (D), hvorav bare ett er riktig. Hver oppgave har lik vekt.

Oppgave 1. Hva er binær-representasjonen, med 4 bits etter komma, til desimaltallet 3,14?

☐ (A) $11{,}000\,0_2$ ☐ (B) $11{,}000\,1_2$ ☒ (C) $11{,}001\,0_2$ ☐ (D) $11{,}001\,1_2$

Oppgave 2. Hvilke av følgende påstander om binær-representasjonen $(b_k \ldots b_0)_2$ til et positivt partall $n > 0$ er sanne?

(1) Bit'en b_0 lengst til høyre er 0.
(2) Minst én av bit'ene $b_k, \ldots, b_0$ er 1.

Svar:

☒ (A) Både (1) og (2). ☐ (B) Bare (1). ☐ (C) Bare (2). ☐ (D) Hverken (1) eller (2).

Oppgave 3. Hva er oktal-representasjonen til desimaltallet 1000?

☐ (A) $1\ 263_8$ ☒ (B) $1\ 750_8$ ☐ (C) $2\ 006_8$ ☐ (D) $3\ 725_8$

Oppgave 4. Et sjakkbrett har $8 \times 8 = 64$ felter. Det ligger ett riskorn på det første feltet, to riskorn på det andre feltet, fire riskorn på det tredje feltet, og deretter dobbelt så mange riskorn på hvert av de neste feltene, til og med det 64. feltet. Hvor mange riskorn ligger det til sammen på sjakkbrettet, skrevet heksadesimalt?

☐ (A) $1\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00_{16}$ ☐ (B) 18 446 744 073 709 551 615

☐ (C) $12\ 34\ 56\ 78\ 9A\ BC\ DE\ F0_{16}$ ☒ (D) $FF\ FF\ FF\ FF\ FF\ FF\ FF\ FF_{16}$

Oppgave 5. Ett lysår er avstanden lyset tilbakelegger på ett år. Gitt at det er vel $0{,}3 \times 10^8$ sekunder i året, og at lyshastigheten er snaut $0{,}3 \times 10^9$ meter/sekund, hvor langt er da et lysår, skrevet på normalisert desimal eksponensial-form?

☐ (A) $0{,}09 \times 10^{17}$ meter ☐ (B) $0{,}9 \times 10^{17}$ meter

☒ (C) $0{,}9 \times 10^{16}$ meter ☐ (D) $0{,}6 \times 10^{72}$ meter

Oppgave 6. Hvilke sannhetsverdier er mulige for en tautologi?

☐ (A) Sant eller usant. ☒ (B) Bare sant.

☐ (C) Bare usant. ☐ (D) Hverken sant eller usant.

Oppgave 7. Det sammensatte uttrykket

$$\neg(\neg p \to q)$$

er logisk ekvivalent med ett av følgende uttrykk. Hvilket?

☐ (A) $p \wedge q$ ☐ (B) $p \vee q$ ☒ (C) $\neg p \wedge \neg q$ ☐ (D) $\neg p \vee \neg q$

Oppgave 8. Vi forutsetter at utsagnet (1) og implikasjonen (2) er sanne:

(1) Jordens skygge på månen har samme (sirkulære) form ved måneformørkelser rett etter solnedgang som ved måneformørkelser omkring midnatt.

(2) Hvis jorden er en flat skive, så kaster den en mer flattrykt (elliptisk) skygge på månen ved måneformørkelser rett etter solnedgang enn ved måneformørkelser omkring midnatt.

Hva kan vi slutte fra dette, og med hvilken begrunnelse?

☐ (A) Jorden er en flat skive, ved negasjonen til (1) og den omvendte implikasjonen til (2).
☐ (B) Jorden er en flat skive, ved negasjonen til (1) og den kontrapositive implikasjonen til (2).
☐ (C) Jorden er ikke en flat skive, ved (1) og den omvendte implikasjonen til (2).
☒ (D) Jorden er ikke en flat skive, ved (1) og den kontrapositive implikasjonen til (2).

Oppgave 9. La n, x, y og z være naturlige tall, med $n \geq 3$. La $P(n, x, y, z)$ være det åpne utsagnet

$$x^n + y^n = z^n \,.$$

Fermat's siste sats sier at

$$\neg \exists n \exists x \exists y \exists z \; P(n, x, y, z) \,,$$

og er logisk ekvivalent med ett av følgende utsagn. Hvilket?

☐ (A) $\forall n \forall x \; \neg \forall y \forall z \; P(n, x, y, z)$ ☒ (B) $\forall n \forall x \; \neg \exists y \exists z \; P(n, x, y, z)$

☐ (C) $\exists n \exists x \; \neg \forall y \forall z \; P(n, x, y, z)$ ☐ (D) $\exists n \exists x \; \neg \exists y \exists z \; P(n, x, y, z)$

Oppgave 10. Kvadratet n^2 av et naturlig tall n kan alltid skrives på formen

$$n^2 = 4a + b \,,$$

der a er et helt tall og $0 \leq b < 4$. Hvilke verdier av b vil faktisk forekomme når n varierer? (Hint: se på de to tilfellene hvor $n = 2k$ og $n = 2k + 1$.)

☒ (A) 0 og 1. ☐ (B) 0, 1 og 2. ☐ (C) 0, 1 og 3. ☐ (D) 0, 1, 2 og 3.

Oppgave 11. La x, y og z være noen naturlige tall. Hva er da de mulige verdiene til kardinaliteten til mengden $A = \{x, y, z\}$?

☐ (A) Alltid 3. ☐ (B) Enten 2 eller 3.

☒ (C) Enten 1, 2 eller 3. ☐ (D) Enten 0, 1, 2 eller 3.

Oppgave 12. La $\mathcal{P}(M)$ være potensmengden til en mengde M med 2 eller flere elementer. La R være den binære relasjonen på $\mathcal{P}(M)$ gitt ved at $A \; R \; B$ for $A, B \in \mathcal{P}(M)$ hvis og bare hvis $A \subseteq B$ som delmengder av M. Hvilken påstand er sann?

☐ (A) R er en ekvivalensrelasjon. ☒ (B) R er en partiell ordning.

☐ (C) R er en total ordning. ☐ (D) Hverken (A), (B) eller (C).

Oppgave 13. Hvor mange forskjellige binære relasjoner finnes det på en endelig mengde A med n elementer?

☐ (A) 2^n ☐ (B) 2^{2n} ☒ (C) 2^{n^2} ☐ (D) Uendelig mange.

Oppgave 14. La T være mengden av trekanter i planet, og la R være den binære relasjonen på T gitt ved at to trekanter x og y oppfyller R (dvs. $x \; R \; y$ er sann) hvis og bare hvis de to trekantene har samme areal og samme omkrets. Hvilken påstand er sann?

☒ (A) R er en ekvivalensrelasjon. ☐ (B) R er en partiell ordning.

☐ (C) R er en total ordning. ☐ (D) Hverken (A), (B) eller (C).

Oppgave 15. La $P(x)$, $Q(x)$ og $R(x)$ være åpne utsagn om en variabel x i en mengde M. La $A = \{x \in M : P(x)\}$, $B = \{x \in M : Q(x)\}$ og $C = \{x \in M : R(x)\}$. Utsagnet

$$\forall x \; (P(x) \wedge Q(x) \to R(x))$$

er da logisk ekvivalent med hvilken av følgende inklusjoner?

☒ (A) $A \cap B \subseteq C$ ☐ (B) $A \cup B \subseteq C$ ☐ (C) $C \subseteq A \cap B$ ☐ (D) $C \subseteq A \cup B$

Oppgave 16. La $f \colon X \to Y$ og $g \colon Z \to W$ være to funksjoner, slik at sammensetningene $f \circ g$ og $g \circ f$ er definert. Da må nødvendigvis

☐ (A) domenet (= definisjonsmengden) X til f være lik domenet Z til g.
☐ (B) kodomenet Y til f være lik kodomenet W til g.
☒ (C) domenet Z til g være lik kodomenet Y til f.
☐ (D) kodomenet W til g være lik domenet Z til g.

Oppgave 17. Følgende algoritme i pseudokode er ment å avgjøre om det blant $n \geq 1$ gitte tall

$$x_1, \ldots, x_n$$

finnes to eller flere som er like, eller om alle tallene er forskjellige.

1. Input n
2. Input $x_1, \ldots, x_n$
3. *tolike* $\leftarrow 0$
4. **For** $i = 1$ **to** n **do**
   4.1. **For** $j = 1$ **to** n **do**
      4.1.1. **If** $x_i = x_j$ **then**
         4.1.1.1. *tolike* $\leftarrow 1$
5. **If** *tolike* $= 0$ **then**
   5.1. Output “Alle er forskjellige.”
   else
   5.2. Output “Minst to er like.”

Dessverre inneholder algoritmen en feil, slik at utskriften (Output) alltid blir “Minst to er like”. Hvilken av følgende linjer kan erstatte linje 4.1, slik at algoritmen gjør det den skal?

☐ (A) 4.1. **For** $j = 1$ **to** i **do**
☐ (B) 4.1. **For** $j = 1$ **to** $i + 1$ **do**
☐ (C) 4.1. **For** $j = i$ **to** n **do**
☒ (D) 4.1. **For** $j = i + 1$ **to** n **do**

SLUTT