MAT1030 - Våren 2006
Løsningsforslag - Eksamen 12.06.06

Oppgave 1

Vi har at $91 = 64 + 16 + 8 + 2 + 1 =$
$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1011011_2$.

(Man kan her også bruke algoritmen fra bokas avsn. 2.3 til å finne dette).

Siden 91 er ikke-negativ er første bit fra venstre i 8-bit datarepresentasjonen av 91 lik 0.Dette gir at 8-bit datarepresentasjonen av 91 blir 0101 1011.

Siden -91 er negativ er første bit fra venstre i 8-bit datarepresentasjonen av -91 lik 1. Videre er 7-bit 2-komplementet til 91 lik 0100101 (vi har her beholdt første 1'er fra høyre og snudd om alle de andre binære siffrene i 91' s binære form.) Dermed blir 8-bit datarepresentasjonen av -91 lik 1010 0101.

Oppgave 2

a) Man kan f. eks. argumentere slik : Vi tenker oss at vi nummerer hver "boks" i en 8-bit streng med tallene fra 1 til 8 fra venstre mot høyre. Gitt en streng $s \in X$ kan vi da krysse av tallene fra 1 til 8 der det er en 0'er i den tilhørende boksen. Vi får derved bestemt en delmengde av mengden $\{1, 2, \cdots, 8\}$. Omvendt vil en slik delmengde bestemme et element $s \in X$. Hvis en streng $s \in X$ inneholder k 0'er vil den tilhørende delmengden

bestå av k elementer. Antall elementer i X_k blir derfor lik antall måter å plukke ut en delmengde med k elementer fra mengden $\{1, 2, \cdots, 8\}$, som selv har 8 elementer.
Vi kan dermed konkludere med at $|X_k| = \binom{8}{k}$.

b) Strengen $s = 11011011$ inneholder to 0'er. Så vi har at

$$\begin{aligned} s\ R\ t \ &\Leftrightarrow \text{antall 0'er i } t \equiv 2 \bmod 3 \\ &\Leftrightarrow \text{antall 0'er i } t \text{ er } 2, 5 \text{ eller } 8. \end{aligned}$$

Derfor er

$$E := \{t \in X \mid s\,R\,t\} = X_2 \cup X_5 \cup X_8.$$

Siden mengdene X_2, X_5 og X_8 er parvis disjunkte er da
$|E| = |X_2| + |X_5| + |X_8| = \binom{8}{2} + \binom{8}{5} + \binom{8}{8}$
$= \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} + 1 = 28 + 56 + 1 = 85.$

c) En mulig løsning er

1. Input $s_1, \cdots, s_8, t_1, \cdots, t_8$ $\{$to 8-bit strenger$\}$

2. $a \leftarrow 0$; $b \leftarrow 0$ $\{a$ og b teller antall 0'er i strengene modulo 3$\}$

3. For $j = 1$ to 8 do
   3.1 $a \leftarrow a + 1 - s_j$; if $a = 3$ then $a \leftarrow 0$
   3.2 $b \leftarrow b + 1 - t_j$; if $b = 3$ then $b \leftarrow 0$

4. If $a = b$ then Output ("de to strengene er i relasjon med hverandre") else Output ("de to strengene er ikke i relasjon med hverandre".)

Oppgave 3

Siden 17 er et primtall er $\gcd(17, 14) = 1$, som deler tallet 6. Fra teorien vet vi da at likningen $17x + 14y = 6$ vil da ha heltallige løsninger. (Det er også "lett" å se at $x = 2, y = -2$ gir en heltallig løsning.)

At $\gcd(17, 14) = 1$ fåes også ut av Euklids algoritme:

$$17 = 1 \cdot 14 + 3; 14 = 4 \cdot 3 + 2; 3 = 1 \cdot 2 + 1; 2 = 2 \cdot 1 + 0.$$

Dette kan vi bruke til å utlede at

$$1 = 3 - 2 = 3 - (14 - 4 \cdot 3) = 5 \cdot 3 - 14 = 5 \cdot (17 - 14) - 14$$
$$= 5 \cdot 17 - 6 \cdot 14, \quad \text{som gir at}$$

$$6 = 6 \cdot 5 \cdot 17 - 6 \cdot 6 \cdot 14 = 17 \cdot 30 + 14 \cdot (-36).$$

Dette betyr at $x_0 = 30, y_0 = -36$ gir en løsning av likningen. Videre kan da alle heltallige løsningene av likningen angies på formen

$x_k = 30 + 14k,\ y_k = -36 - 17k$, der $k \in \mathbb{Z}$.

(Alternativt, $x_j' = 2 + 14j,\ y_j' = -2 - 17j$, der $j \in \mathbb{Z}$.)

Oppgave 4

$K_{2,3}$ har følgende (forbindelses-) matrise m.h.p. den oppgitte listingen av nodene :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Skisse av de tre grafene skulle være lett å lage. Av typografiske hensyn oppgir vi her istedet matrisene til h.hvis $K_{2,2}$ og $K_{3,3}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) I $K_{2,2}$ er $\deg(v) = 2$ for alle $v \in V$, så $K_{2,2}$ er Eulersk. I $K_{2,3}$ er $\deg(A_1) = \deg(A_2) = 3$, mens $\deg(B_j) = 2$ for $j = 1, 2, 3$. Dette betyr at $K_{2,3}$ har nøyaktig to noder med odd grad, så den er semi-Eulersk. I $K_{3,3}$ har alle nodene grad lik 3, så den er hverken Eulersk eller semi-Eulersk.

En Eulersk vei i $K_{2,3}$ som begynner i A_1 og ender i A_2 er f. eks. $A_1, B_1, A_2, B_2, A_1, B_3, A_2$. (Lister her bare nodene som veien går gjennom siden grafen er enkel).

Et utspennende tre for $K_{3,3}$ er et tre med samme nodemengde som $K_{3,3}$ som er slik at dets kantmengde er en delmengde av kantmengden til $K_{3,3}$. Det finnes mange slike; ett er f. eks. det som har kantmengde gitt ved $\{A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2\}$. (Oppgir her en kant mellom A_i og B_j ved A_iB_j siden grafen er enkel.)

Oppgave 5

Vi sjekker først at $P(1)$ er sann.

La $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sett da $m = 1$. Da er $a^1 - b^1 = a - b = 1 \cdot (a - b) = m \cdot (a - b)$. Så vi ser at $P(1)$ er sann.

Deretter antar vi at $P(n)$ er sann for $n = k \in \mathbb{N}$. Vi må nå sjekke at $P(n)$ er da sann for $n = k + 1$.

La $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Siden $P(k)$ er sann finnes det en $m \in \mathbb{Z}$ slik at $a^k - b^k = m \cdot (a - b)$. Ved å benytte det oppgitte hintet får vi at

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a^{k+1} - a \cdot b^k + a \cdot b^k - b^{k+1} = a \cdot (a^k - b^k) + (a - b) \cdot b^k$$

$$= a \cdot m \cdot (a - b) + (a - b) \cdot b^k = (a \cdot m + b^k) \cdot (a - b) = m' \cdot (a - b)$$

der $m' := a \cdot m + b^k \in \mathbb{Z}$.

Dette viser at $P(k + 1)$ er sann, som ønsket.

Ved induksjon har vi dermed vist at $P(n)$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.