Obligatorisk oppgave 2

MAT1030 - Diskret Matematikk, Vår 2008

Innleveringfrist: 25. april 2008 klokken 14.30

Leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje i N.H.Abels hus). Erfaringsmessig blir det lange køer rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere. Husk å bruke den offisielle obligforsiden ved innlevering!

Dersom du på grunn av sykdom eller lignende har behov for å utsette innleveringen, må du sende søknad til Elisabeth Seland (rom B 718, N.H.Abels hus, epost: studieinfo@math.uio.no, tlf. 22 85 59 07). Husk at sykdom må dokumenteres ved legeattest! Se forøvrig

http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml

for nærmere informasjon om reglement rundt obligatoriske oppgaver ved Matematisk institutt.

Oppgaven er obligatorisk og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha fått til noe på alle oppgavene, og minst 50% av settet må være riktig besvart. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke har kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn det du har kommet frem til. Det er lov å samarbeide og bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg (for hånd eller på datamaskin) og gjenspeile din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Oppgave 1

Vi definerer f ved rekursjon over $n \in \mathbb{N}$ ved

$$f(1) = 1$$
$$f(n) = f(n-1) + 3(n-1)n + 1 \text{ når } n > 1$$

a) Regn ut $f(2)$, $f(3)$ og $f(4)$.
b) Finn en formel for $f(n)$ og vis denne ved induksjon over $\mathbb{N}$.

Oppgave 2

Vi definerer en relasjon $\sim$ på $\mathbb{N}^2$ ved

$$(n, m) \sim (k, l) \Leftrightarrow n + l = m + k.$$

a) Vis at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon.

Vi definerer funksjonen

$$\oplus : \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$$

ved

$$(n, m) \oplus (k, l) = (n + k, m + l).$$

b) Vis at hvis $(n, m) \sim (n_1, m_1)$ og $(k, l) \sim (k_1, l_1)$, så vil

$$(n, m) \oplus (k, l) \sim (n_1, m_1) \oplus (k_1, l_1).$$

c) Vi skriver $E(n, m)$ for ekvivalensklassen til (n, m).
Vi definerer *addisjon* av ekvivalensklasser ved

$$E(n, m) + E(k, l) = E((n, m) \oplus (k, l)).$$

[Vi bruker resultatet i b) for å vise at denne definisjonen gir mening, men det trenger du ikke å argumentere for.]
Finn en funksjon f slik at:

1. Definisjonsområdet til f er $\mathbb{J}$.
2. Verdiområdet til f er mengden av ekvivalensklassene til $\sim$.
3. f er injektiv.
4. f er surjektiv.
5. $f(a + b) = f(a) + f(b)$ for alle a og b i $\mathbb{J}$.

Det vi har gjort her er å gjennomføre den mengdeteoretiske konstruksjonen av de hele tallene fra de naturlige tallene.

Oppgave 3

a) Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved å stokke om på bokstavene i ordet

$$ABBABOOM.$$

Begrunn svaret.

b) På hvor mange måter kan vi trekke to kort i rekkefølge fra en vanlig kortstokk, og i hvor mange tilfeller vil begge kortene være hjerter?
Hvor ofte, i gjennomsnitt, vil begge kortene være hjerter hvis du trekker to vilkårlige kort fra en kortstokk?

c) Hvor mange elever må det være i en klasse for at sannsynligheten for at minst to har fødselsdag på samme dag overstiger 50%?

d) Skriv en pseudokode for en algoritme som beregner

$$^{n}P_{r}.$$

Oppgave 4

Vi definerer en mengde X av ord over alfabetet $\{a, b, c\}$ som den minste mengden som tilfredsstiller

1. $e \in X$.
2. Hvis $v \in X$ er $avb \in X$ og $bvc \in X$.
3. Hvis $u \in X$ og $v \in X$ vil $uv \in X$.

a) Finn ut hvilke av følgende tre ord som er med i X. Alle svarene skal begrunnes:
   i) $aabbcb$
   ii) $abbaac$
   iii) $babc$

b) Bruk induksjon til å vise at når $v \in X$ vil antall b'er i v være lik summen av antall a'er i v og antall c'er i v.

SLUTT