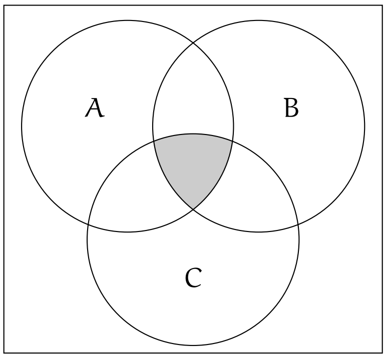
MAT1030 10/6-08 Fasit

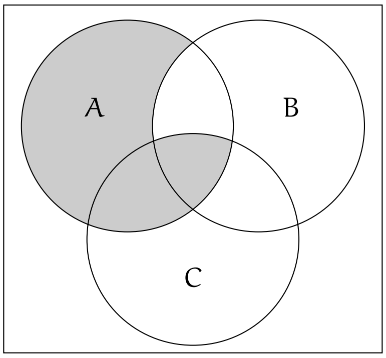
Oppgave 1 Venn–diagrammet for

$$A \cap B \cap C \subseteq A - (B \cap \overline{C})$$

gir tre felter, det for bare A, det for A og C, men ikke B, og det for snittet av alle tre. Det siste betyr at ulikheten holder.



$A \cap B \cap C$



$A - (B \cap \overline{C})$

Oppgave 2

a) $f(3) = 46$ og $f(4) = 178$.

b) Den generelle løsningen er
$$F(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n.$$

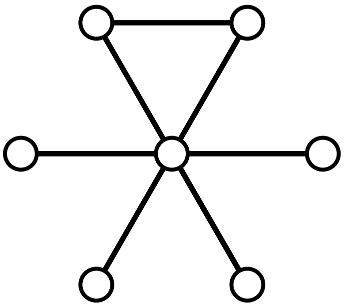
c) Insetting for initialverdiene gir $A = 2$ og $B = 1$, som gir løsning
$$f(n) = 2 \cdot 3^n + (-2)^n.$$

d) Induksjonstarten er at formelen stemmer for $n = 1$ og for $n = 2$. Dette kan vises ved innsetting eller ved å henvise til at vi tvang induksjonstarten til å holde da vi fant A og B fra initialbetingelsene.
I induksjonsskrittet antar vi at
$$f(n-1) = 2 \cdot 3^{n-1} + (-2)^{n-1}$$
og at
$$f(n-2) = 2 \cdot 3^{n-2} + (-2)^{n-2}.$$
Regning gir da
$$f(n) = f(n-1) + 6f(n-2) = 18 \cdot 3^{n-2} + 4 \cdot (-2)^{n-2} = 2 \cdot 3^n + (-2)^n.$$

Oppgave 3

a) G kan ikke være et tre, for i et tre er antall kanter en mindre enn antall noder.
G trenger ikke å være sammenhengende. Eksempelvis kan G bestå av en sykel med fire noder og kanter og en sykel med tre noder og kanter.

b) Den største mulige graden er seks, ettersom vi da får en kant fra noden til hver av de andre.
Siden grafen er enkel kan vi ikke ha noen kant fra en node til seg selv, og vi kan heller ikke ha to kanter til samme node.
Da får vi en stjerneformet graf hvor to av nodene er forbundet med en kant, og derfor har grad 2.



c) Alle slike grafer må være isomorfe.
Har vi to slike grafer, sender vi noden med grad 6 på noden med grad 6, de to nodene med grad 2 på de to nodene med grad 2 og de fire nodene med grad 1 på de fire nodene med grad 1.
Det gir en isomorfi.

Oppgave 4

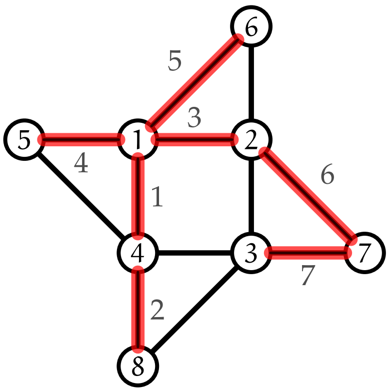
a) Vi har to løsninger.
Starter vi i node 1 får vi kantene i rekkefølge

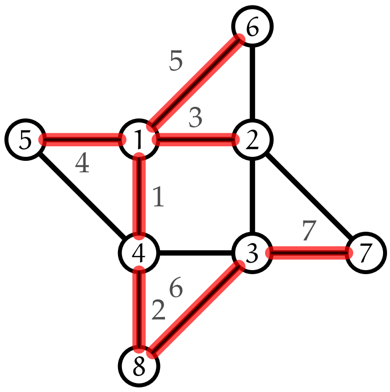
$$(1,4),(4,8),(1,2),(1,5),(1,6),(2,7),(7,3)$$

eller

$$(1,4),(4,8),(1,2),(1,5),(1,6),(8,3),(3,7).$$

Et korrekt tegnet tre er en godkjent løsning.





b) Her har vi også to riktige løsninger, og et korrekt tegnet tre godkjennes. Løsningene, venstre tall er avstanden til node 1, er

1 $(1, 4)$

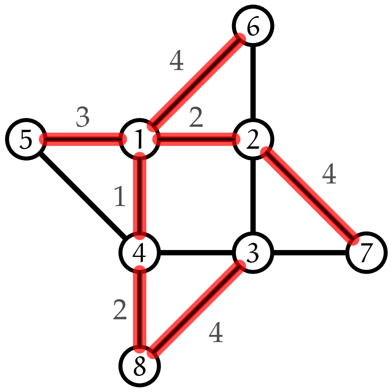
2 $(1, 2)$

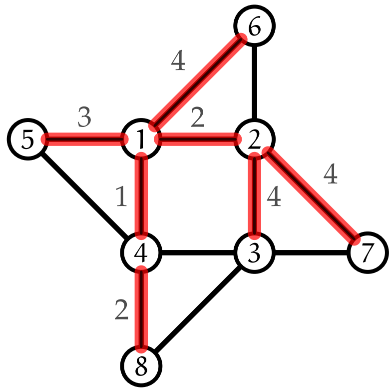
3 $(1, 5), (4, 8)$

4 $(1, 6)$

6 $(2, 7)$

7 $(2, 3)$ eller $(8, 3)$.





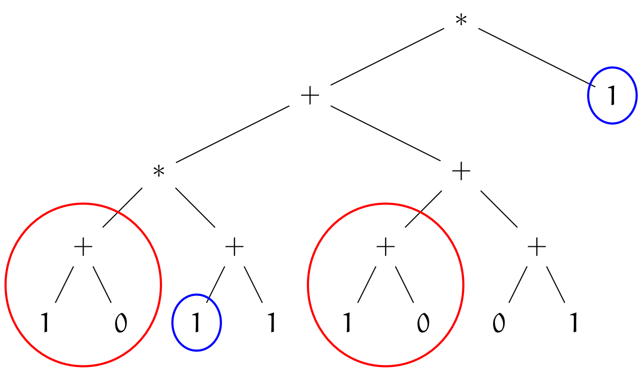
Oppgave 5

a) Unifisering går ut på at vi skal erstatte x og y med andre uttrykk slik at de to uttrykkene blir syntaktisk like.
Riktig svar er at vi skal erstatte y med 1 og x med $(1 + 0)$, og da blir begge uttrykkene

$$r = (((1 + 0) * (1 + 1)) + ((1 + 0) + (0 + 1))) * 1.$$

Det kan variere hvor langt man velger å følge unifiseringsalgoritmen, kravet er at man skal komme frem til riktig svar.

b) Syntakstreet ser slik ut.



Det unifiserende uttrykket skrevet med polsk notasjon vil være

$$* + * + 10 + 11 + +10 + 011.$$