

MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 11: Relasjoner

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

18. februar 2008



Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.
- Forståelsen av dette blir testet i Oblig. 1

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.
- Forståelsen av dette blir testet i Oblig. 1
- Definisjonene av kardinaltall og potensmengde, og sammenhengene mellom dem, bør dere kjenne til.

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.
- Forståelsen av dette blir testet i Oblig. 1
- Definisjonene av kardinaltall og potensmengde, og sammenhengene mellom dem, bør dere kjenne til.
- Vi startet med definisjonene av ordnede par, Cartesiske produkter og relasjoner.

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.
- Forståelsen av dette blir testet i Oblig. 1
- Definisjonene av kardinaltall og potensmengde, og sammenhengene mellom dem, bør dere kjenne til.
- Vi startet med definisjonene av ordnede par, Cartesiske produkter og relasjoner.
- Dette skal vi fortsette med.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes **abstrakt** og at det er mange nye **begreper**.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye **symboler** som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.
- De relasjonene vi vil innføre i eksemplene, vil som oftest ikke være pensum, men evnen til å forstå slike eksempler kan bli prøvet til eksamen.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i kretsmesterskapet på 10 km klassisk etter oppnådd slutt-tid.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i kretsmesterskapet på 10 km klassisk etter oppnådd slutt-tid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i kretsmesterskapet på 10 km klassisk etter oppnådd slutt-tid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
- Det er noe felles ved oppgaven å skulle ordne en mengde, og det er naturlig å isolere de relasjonene som kan oppfattes som ordninger.

Relasjoner

- Vi ordner gjerne studentene etter oppnådde karakterer.

Relasjoner

- Vi ordner gjerne studentene etter oppnådde karakterer.
Er det noen forskjell på en slik “ordning” og en alfabetisk ordning?

Relasjoner

- Vi ordner gjerne studentene etter oppnådde karakterer.
Er det noen forskjell på en slik “ordning” og en alfabetisk ordning?
- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det finnes mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.

Relasjoner

- Vi ordner gjerne studentene etter oppnådde karakterer.
Er det noen forskjell på en slik “ordning” og en alfabetisk ordning?
- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det finnes mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?

Relasjoner

- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.

Relasjoner

- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.
- Vi gir listen først og drøfter hver enkelt egenskap etterpå:

Relasjoner

Definisjon

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
 - **Transitiv** hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - **Refleksiv** hvis xRx for alle $x \in A$.
 - **Irrefleksiv** hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .
 - **Symmetrisk** hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - **Antisymmetrisk** hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
 - **Transitiv** hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.
- Vi skal bruke den tiden vi trenger til å lære oss disse begrepene, og å forstå dem.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som $\phi \rightarrow \psi$ er en tautologi.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som
$$\phi \rightarrow \psi \text{ er en tautologi.}$$

Da er R en refleksiv relasjon.

Refleksive relasjoner

Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

Refleksive relasjoner

Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & T & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Refleksive relasjoner

Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & T & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Ved å se at vi har bare T på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv.

Refleksive relasjoner

Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & T & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Ved å se at vi har bare T på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv.

Gjør vi en liten forandring, trenger ikke relasjonen lenger å være refleksiv:

Refleksive relasjoner

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Refleksive relasjoner

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på \mathbb{N} , \mathbb{J} , \mathbb{Q} og \mathbb{R} .

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på \mathbb{N} , \mathbb{J} , \mathbb{Q} og \mathbb{R} .
- *Ekte inklusjon* er en irrefleksiv relasjon.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow \text{F}$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow F$$

er en tautologi.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow F$$

er en tautologi.

- Da er S hverken refleksiv eller irrefleksiv.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & F & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & F & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & F & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & T & F & F & F \\ T & \mathbf{F} & F & F & F \\ T & F & F & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & T & F & F & F \\ T & \mathbf{F} & F & F & F \\ T & F & \mathbf{F} & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \text{T} & \text{F} & \text{F} & \text{F} \\ \text{T} & \mathbf{F} & \text{F} & \text{F} & \text{F} \\ \text{T} & \text{F} & \mathbf{F} & \text{F} & \text{T} \\ \text{T} & \text{T} & \text{F} & \mathbf{F} & \text{F} \\ \text{T} & \text{F} & \text{F} & \text{F} & \text{F} \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{T} \\ \mathbf{T} & \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står \mathbf{F} langs diagonalen.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- n og m har en felles faktor > 1 , som en relasjon på \mathbb{N} .

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- n og m har en felles faktor > 1 , som en relasjon på \mathbb{N} .
- $A \cap B = \emptyset$ som relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .

Symmetriske relasjoner

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

Eksempel

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Eksempel

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & F & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & F & T & F \\ F & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er **ikke** symmetrisk

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- \leq og $<$ i vanlige sammenhenger.

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- \leq og $<$ i vanlige sammenhenger.
- Antisymmetri er svært ofte knyttet til former for ordninger, og vi kommer tilbake til dette senere

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.

Transitive relasjoner

Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- “ ϕ er en logisk konsekvens av ψ ” er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.
- *Søsken til* er transitiv hvis vi mener helsøsken, men ikke hvis vi inkluderer halv søsken.

Noen eksempler

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.

Noen eksempler

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.
- Vi skal se på hvilke av de fem egenskapene vi har sett på disse relasjonene vil ha.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
 2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A **impliserer** B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
 2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.
- \Rightarrow er transitiv siden $A \Rightarrow C$ når $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow C$.

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.
- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \dots, x_n).$$

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P “gjør”, er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.
- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \dots, x_n).$$

- En fordeling av verdier på variablene kaller vi en **valuasjon** eller en **tilstand**.

Noen eksempler

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .

Noen eksempler

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

Noen eksempler

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

$$u \llbracket \mathcal{P} \rrbracket v$$

Noen eksempler

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ på V , hvor

$$u \llbracket \mathcal{P} \rrbracket v$$

hvis output-valuasjonen er v når inputvaluasjonen er u .

Noen eksempler

- Hvis $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.

Noen eksempler

- Hvis $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er antisymmetrisk, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er antisymmetrisk, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[[\mathcal{P}]]$ er i praksis aldri transitiv, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene.

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er symmetrisk, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen **ENIGMA** brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er antisymmetrisk, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[[\mathcal{P}]]$ er i praksis aldri transitiv, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene.

Dette vil imidlertid være tilfelle om output-dataene alltid inneholder en form for stopp-ordre.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valusjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

$$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

hvis programmet \mathcal{P} , om vi er i posisjon p og med valuasjon v vil komme til posisjon q og med valuasjon u etter ingen, ett eller flere regneskritt.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer “gjør” er \vdash^*
- Et program P er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en **bestemt posisjon** i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

$$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

hvis programmet \mathcal{P} , om vi er i posisjon p og med valuasjon v vil komme til posisjon q og med valuasjon u etter ingen, ett eller flere regneskritt.

- Denne relasjonen er selvfølgelig avhengig av \mathcal{P} , og vi kan skrive den $\vdash_{\mathcal{P}}^*$.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt.
Den er da normalt ikke irrefleksiv.
- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.
- Hvis relasjonen er *antisymmetrisk*, vil beregningen aldri gå i løkke.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er **ekvivalensrelasjonene**. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Vi ser at R deler A opp i tre disjunkte mengder $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 4, 7\}$ og $D = \{2, 5, 8\}$, hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen R -forbindelser på mengdene imellom.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R -relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R -relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler \mathbb{R}^2 opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius r for $r \geq 0$.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*.

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*.
Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Eksempel (Fortsatt)

- c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*. Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.
Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.
Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.
- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.
Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.
- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c .

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c .

Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuitjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”.

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuitisjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”. Den formelle definisjonen er:

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuitjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”. Den formelle definisjonen er:

Definisjon

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuitjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”. Den formelle definisjonen er:

Definisjon

La R være en relasjon på en mengde A .

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp intuitjonen vår om å formalisere det uformelle “dele visse egenskaper”. Den formelle definisjonen er:

Definisjon

La R være en relasjon på en mengde A .

Vi kaller R en **ekvivalensrelasjon** om R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.