

Forelesning 11

Relasjoner

Dag Normann - 18. februar 2008

Oppsummering

- Vi har gjort oss ferdige med innføringen av Boolesk mengdelære.
- Bruk av Venn-diagrammer er et av læringsmålene i dette emnet.
- Vi så kort på digital representasjon av mengder.
- Forståelsen av dette blir testet i Oblig. 1
- Definisjonene av kardinaltall og potensmengde, og sammenhengene mellom dem, bør dere kjenne til.
- Vi startet med definisjonene av ordnede par, Cartesiske produkter og relasjoner.
- Dette skal vi fortsette med.

Relasjoner

- Erfaringsmessig faller det stoffet vi nå begynner på vanskeligere for mange enn det vi har gått gjennom til nå.
- Det skyldes at stoffet synes abstrakt og at det er mange nye begreper.
- I eksempler vil vi kunne innføre noen nye symboler som vi gir en spesiell betydning.
- Et eksempel fra forrige uke er relasjonen $a \equiv_p b$ som uttrykker at p er en faktor i $a - b$.
- En av de ferdighetene vi skal oppøve i MAT1030 er evnen til å lese, og forstå, definisjoner.
- De relasjonene vi vil innføre i eksemplene, vil som oftest ikke være pensum, men evnen til å forstå slike eksempler kan bli prøvet til eksamen.

Relasjoner

- Relasjoner med bestemte egenskaper kan dukke opp i så mange forskjellige sammenhenger at det kan være aktuelt å studere dem under ett.
- Det kan også være aktuelt å utvikle program som virker for alle relasjoner av en gitt type.
- Følgende oppgaver trenger strengt tatt det samme programmet:
 - Ordne dagens avisoverskrifter alfabetisk.
 - Ordne deltagerne i kretsmesterskapet på 10 km klassisk etter oppnådd slutt-tid.
 - Ordne LOTTO-tallene etter størrelse.
- Det er noe felles ved oppgaven å skulle ordne en mengde, og det er naturlig å isolere de relasjonene som kan oppfattes som ordninger.

Relasjoner

- Vi ordner gjerne studentene etter oppnådde karakterer.
Er det noen forskjell på en slik "ordning" og en alfabetisk ordning?

- Inklusjon mellom mengder er en form for “større enn”, men det finnes mengder, eksempelvis $\{1, 2, 3\}$ og $\{2, 3, 4\}$, som ikke er inneholdt i hverandre noen vei.
- Hva vil sorteringsalgoritmer gjøre hvis vi bruker dem på slike ordninger?

Relasjoner

- Det er noen egenskaper ved relasjoner som er så vanlig forekommende (hos de *nyttige* relasjonene) at vi har gitt dem egne navn.
- Vi gir listen først og drøfter hver enkelt egenskap etterpå:

Relasjoner

Definisjon

- En relasjon R på en mengde A kalles:
 - Refleksiv hvis xRx for alle $x \in A$.
 - Irrefleksiv hvis vi ikke har noen $x \in A$ slik at xRx .
 - Symmetrisk hvis xRy medfører yRx for alle $x, y \in A$.
 - Antisymmetrisk hvis $xRy \wedge yRx$ medfører at $x = y$ for alle $x, y \in A$.
 - Transitiv hvis $xRy \wedge yRz$ medfører xRz for alle $x, y, z \in A$.
- Vi skal bruke den tiden vi trenger til å lære oss disse begrepene, og å forstå dem.

Refleksive relasjoner

Eksempel (Refleksiv: xRx for alle x)

- For enhver mengde A vil likhetsrelasjonen $x = y$ være refleksiv på A .
- Hvis X er mengden av delmengder av en mengde \mathcal{E} , vil inklusjonsrelasjonen $A \subseteq B$ være refleksiv på X .
- \leq er en refleksiv relasjon, uansett om vi ser på den som en relasjon på \mathbb{N} , på \mathbb{Q} , på \mathbb{J} eller på \mathbb{R} .
- $<$ er normalt ikke en refleksiv relasjon, spesielt ikke nå vi bruker tegnet på vanlig måte for \mathbb{N} etc.
- Hvis A er mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , og ϕ og ψ er sammensatte utsagn, kan vi definere $\phi R \psi$ som

$$\phi \rightarrow \psi \text{ er en tautologi.}$$

Da er R en refleksiv relasjon.

Refleksive relasjoner

Hvis en relasjon gis på matriseform, er det lett å se om relasjonen er refleksiv eller ikke:

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & T & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Ved å se at vi har bare T på diagonalen, ser vi at relasjonen er refleksiv. Gjør vi en liten forandring, trenger ikke relasjonen lenger å være refleksiv:

Refleksive relasjoner

$$\begin{bmatrix} T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & T & F & T \\ T & T & F & T & F \\ T & F & F & F & T \end{bmatrix}$$

Irrefleksive relasjoner

Eksempel (Irrefleksiv: $\neg(xRx)$ for alle x)

- \neq er irrefleksiv på alle mengder.
- *Far til* og *Mor til* er irrefleksive relasjoner på enhver forsamling av mennesker.
- $<$ og $>$ er irrefleksive relasjoner på \mathbb{N} , \mathbb{J} , \mathbb{Q} og \mathbb{R} .
- *Ekte inklusjon* er en irrefleksiv relasjon.

Irrefleksive relasjoner

Eksempel

- La X være mengden av sammensatte utsagn i utsagnsvariablene p , q og r , la ϕ og ψ være sammensatte utsagn, og definer relasjonen S ved

$$\phi S \psi$$

når

$$\phi \wedge \psi \rightarrow F$$

er en tautologi.

- Da er S hverken refleksiv eller irrefleksiv.

Irrefleksive relasjoner

Hvis relasjonen blir beskrevet ved hjelp av en matrise, er det også enkelt å kontrollere om relasjonen er irrefleksiv:

$$\begin{bmatrix} F & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \\ T & F & F & F & T \\ T & T & F & F & F \\ T & F & F & F & F \end{bmatrix}$$

Det er bare å sjekke om det står F langs diagonalen.

Symmetriske relasjoner

Eksempel (Symmetrisk: xRy medfører yRx for alle x og y .)

- Symmetriske relasjoner er de relasjonene hvor rekkefølgen ikke spiller noen rolle.
- x er gift med y .
- $\phi \wedge \psi$ er ikke en kontradiksjon.
- $\phi \wedge \psi$ er en kontradiksjon.
- n og m har en felles faktor > 1 , som en relasjon på \mathbb{N} .
- $A \cap B = \emptyset$ som relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .

Symmetriske relasjoner

Vi kan undersøke om en relasjon er symmetrisk ved å studere matriserepresentasjonen:

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & T & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er symmetrisk

Eksempel

$$\begin{bmatrix} T & F & T & F \\ T & F & F & T \\ T & F & T & T \\ F & T & T & F \end{bmatrix}$$

Denne relasjonen er *ikke* symmetrisk

Antisymmetriske relasjoner

Eksempel (Antisymmetrisk: $xRy \wedge yRx$ medfører $x = y$)

- I en antisymmetrisk relasjon skal vi ikke ha andre positive speilsymmetrier om diagonalen enn de som ligger på diagonalen.
- Inklusjon av mengder.
- \leq og $<$ i vanlige sammenhenger.
- Antisymmetri er svært ofte knyttet til former for ordninger, og vi kommer tilbake til dette senere

Transitive relasjoner**Eksempel (Transitiv: $xRy \wedge yRz$ medfører xRz)**

- $<$ og \leq er transitive relasjoner i alle vanlige sammenhenger.
- \subseteq er en transitiv relasjon på potensmengden til \mathcal{E} .
- " ϕ er en logisk konsekvens av ψ " er transitiv.
- *Far til* og *Mor til* er ikke transitive, men *etterkommer* er transitiv.
- *Søsken til* er transitiv hvis vi mener helsøsken, men ikke hvis vi inkluderer halvøsken.

Noen eksempler

- Vi skal ta utgangspunkt i noen relasjoner som det kan være aktuelt å studere av praktiske eller teoretiske grunner.
- Vi skal se på hvilke av de fem egenskapene vi har sett på disse relasjonene vil ha.

Noen eksempler

- Hvis A og B er utsagn i predikatlogikk, lar vi $A \Rightarrow B$ bety at B er en logisk konsekvens av A . Vi sier at A impliserer B .
- Det betyr at B er sann i enhver situasjon som gjør A sann.
- Vi oppfatter \Rightarrow som en relasjon på mengden av utsagn i predikatlogikk.
- \Rightarrow er *refleksiv* fordi $A \Rightarrow A$ for alle utsagn A .
- \Rightarrow er da ikke *irrefleksiv*.
- \Rightarrow er ikke *symmetrisk* (se 1.) eller *antisymmetrisk* (se 2.)
 1. Vi har $x > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x = 0$, men omvendingen gjelder ikke.
 2. Utsagnene $\neg(x < 0) \vee x > 0$ og $x < 0 \rightarrow x > 0$ impliserer hverandre, men de er ikke like.
- \Rightarrow er transitiv siden $A \Rightarrow C$ når $A \Rightarrow B$ og $B \Rightarrow C$.

Noen eksempler

- Når man skal gi en matematisk beskrivelse av hva et program P "gjør", er det ofte to relasjoner som det er aktuelle å studere.
- Vi begrenser oss til språk som minner om pseudokoder.
- Da har vi variable x_1, \dots, x_n i programmet.

- Underveis vil verdiene på disse variablene endre seg, gjennom instruksjoner som

$$x_i \leftarrow t(x_1, \dots, x_n).$$

- En fordeling av verdier på variablene kaller vi en valuasjon eller en tilstand.

Noen eksempler

- La V være mengden av valuasjoner, og la u og v være elementer i V .
- Hvert program \mathcal{P} vil bestemme en relasjon $[[\mathcal{P}]]$ på V , hvor

$$u[[\mathcal{P}]]v$$

hvis output-valuasjonen er v når inputvaluasjonen er u .

Noen eksempler

- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *refleksiv*, betyr det at programmet i realiteten lar alle inputvaluasjoner være uforandret.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *irrefleksiv*, betyr det at programmet gjør endringer uansett input.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *symmetrisk*, betyr det at hvis vi kjører programmet en gang til, kommer vi tilbake til utgangspunktet.
- Krypteringsmaskinen ENIGMA brukt av tyskerne under krigen hadde den egenskapen.
- Hvis $[[\mathcal{P}]]$ er *antisymmetrisk*, betyr det at vi aldri kommer tilbake til input-dataene ved å kjøre programmet på output-dataene.
- $[[\mathcal{P}]]$ er i praksis aldri *transitiv*, siden dette ville medført at vi oppnår det samme om vi kjører programmet to ganger, hvor output overføres til input mellom gangene. Dette vil imidlertid være tilfelle om output-dataene alltid inneholder en form for stopp-ordre.

Noen eksempler

- En annen viktig relasjon i studiet av hva programmer "gjør" er \vdash^*
- Et program \mathcal{P} er normalt en form for tekst, og den teksten består av punkter eller instruksjoner.
- Typisk har vi nummerert alle linjene i en pseudokode, slik at vi kan snakke om at vi er i en bestemt posisjon i programmet underveis i kjøringen av programmet.
- La P være mengden av posisjoner og la fortsatt V være mengden av valuasjoner.
- \vdash^* er relasjonen på $P \times V$ hvor

$$(p, v) \vdash^* (q, u)$$

hvis programmet \mathcal{P} , om vi er i posisjon p og med valuasjon v vil komme til posisjon q og med valuasjon u etter ingen, ett eller flere regneskritt.

- Denne relasjonen er selvfølgelig avhengig av \mathcal{P} , og vi kan skrive den $\vdash_{\mathcal{P}}^*$.

Noen eksempler

- Denne relasjonen er *refleksiv*, fordi vi tillater at vi ikke tar noen regneskritt. Den er da normalt ikke *irrefleksiv*.

- Denne relasjonen er *transitiv*.
- Hvis relasjonen er symmetrisk, er det en katastrofe for programmereren, siden vi da bare har løkkeberegninger.
- Hvis relasjonen er *antisymmetrisk*, vil beregningen aldri gå i løkke.

Ekvivalensrelasjoner

En viktig klasse av relasjoner er ekvivalensrelasjonene. La oss se på noen eksempler før vi gir den formelle definisjonen.

Eksempel

a) La $A = \{0, \dots, 9\}$.

Hvis a og b er elementer i A lar vi aRb hvis $a - b$ er delelig med 3.

Vi ser at R deler A opp i tre disjunkte mengder $B = \{0, 3, 6, 9\}$, $C = \{1, 4, 7\}$ og $D = \{2, 5, 8\}$, hvor hver mengde består av tall som står i innbyrdes relasjon til hverandre, mens vi ikke har noen R -forbindelser på mengdene imellom.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

b) La $A = \mathbb{R}^2$ og la

$$(x, y)R(u, v) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = u^2 + v^2.$$

Vi ser at to punkter står i R -relasjon til hverandre nøyaktig når avstanden til origo er den samme.

Denne relasjonen deler \mathbb{R}^2 opp i uendelig mange disjunkte mengder, nemlig sirklene om origo med radius r for $r \geq 0$.

Ekvivalensrelasjoner

Eksempel (Fortsatt)

c) La $A = \mathbb{Q}$ og la pRq om p og q har den samme *heltallsverdien*.

Heltallsverdien til et tall p er det største hele tallet $a \leq p$.

I alle disse eksemplene har vi definert en relasjon R ved at to objekter står i relasjon til hverandre når de deler en viss felles egenskap.

Det er denne typen relasjoner vi vil kalle *ekvivalensrelasjoner*.

Ekvivalensrelasjoner

- Uansett hvilken egenskap det vil være snakk om, vil ethvert objekt dele denne egenskapen med seg selv.

Vi vil altså kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *refleksiv*.

- Hvis a og b deler en egenskap, kan vi også snu på ordstillingen og si at b og a deler denne egenskapen.
- Det er altså et rimelig krav til at en relasjon skal kalles en ekvivalensrelasjon at den er *symmetrisk*.
- Hvis a og b deler en egenskap, og b og c deler den samme egenskapen, er den også felles for a og c .

Vi vil kreve av en ekvivalensrelasjon at den skal være *transitiv*.

Ekvivalensrelasjoner

- Det viser seg at disse tre egenskapene er tilstrekkelige til å fange opp inutisjonen vår om å formalisere det uformelle "dele visse egenskaper".

Den formelle definisjonen er:

Definisjon

La R være en relasjon på en mengde A .

Vi kaller R en ekvivalensrelasjon om R er refleksiv, symmetrisk og transitiv.