MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 13: Funksjoner

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

25. februar 2008

Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.

Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.
- Vi definerte hva vi mener med partielle ordninger og med totale ordninger.

Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.
- Vi definerte hva vi mener med partielle ordninger og med totale ordninger.
- Deretter snakket vi generelt om funksjoner og spesielt om injektive funksjoner.

Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.
- Vi definerte hva vi mener med partielle ordninger og med totale ordninger.
- Deretter snakket vi generelt om funksjoner og spesielt om injektive funksjoner.
- Det ble mange nye begreper, og før vi fortsetter, skal vi repetere, ved hjelp av eksempler, noen av disse begrepene.

Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.
- Vi definerte hva vi mener med partielle ordninger og med totale ordninger.
- Deretter snakket vi generelt om funksjoner og spesielt om injektive funksjoner.
- Det ble mange nye begreper, og før vi fortsetter, skal vi repetere, ved hjelp av eksempler, noen av disse begrepene.
- Vi starter med å se på en funksjon og et par avledede relasjoner.

Opphenting

Eksempel

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

Opphenting

Eksempel

- La $A = \{1, \ldots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er definisjonsområdet.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt verdiområdet, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}$$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A, så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f?
- Bildemengden vil være $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 18\}$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - Er R eller S refleksiv?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?
  - Er R eller S antisymmetrisk?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f:
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - Er R eller S refleksiv?
  - Er R eller S irrefleksiv?
  - Er R eller S symmetrisk?
  - Er R eller S antisymmetrisk?
  - Er R eller S transitiv?

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  - Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  - Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  - Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  - Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  - Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*
- Det betyr at R er en ekvivalensrelasjon.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
  - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
  - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
  - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
  - Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
  - Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*
- Det betyr at R er en ekvivalensrelasjon.
- Vi har ikke brukt noen spesielle egenskaper ved A eller f, så relasjoner konstruert på denne måten vil alltid være ekvivalensrelasjoner.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
    1. $\{1, 10, 100\}$
    2. $\{2, 11, 20\}$
    3. $\{3, 12, 21, 30\}$
    4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
    5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
  1. $\{1, 10, 100\}$
  2. $\{2, 11, 20\}$
  3. $\{3, 12, 21, 30\}$
  4. $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
  5. $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$

  osv.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leq b$ og $b \leq a$ så $a = b$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leq b$ og $b \leq a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leq b$ og $b \leq a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at S er en partiell ordning.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S.
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
  - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
  - La aSb og bSc.
    - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc.
    - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc.
  - Vi ser at S er transitiv.
  - Anta at aSb og bSa
    - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb.
    - Da er $a \leq b$ og $b \leq a$ så $a = b$
  - Det følger at S er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at S er en partiell ordning.
- Oppgave: Vis at S er en total ordning, og skriv ned de 10 S-første tallene.

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r, og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.

Opphenting

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
  1. A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
  2. B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
  3. C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r, og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer $\sqrt{x}$.
- f vil være injektiv, for hvis vi speiler to forskjellige ord, vil speilbildene bli forskjellige.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.

- Her har vi egentlig brukt noe som kalles skuffeprinsippet, dueslagsprinsippet eller på engelsk the pigeon hole principle.

Opphenting

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\cdots = 1,0000\cdots .$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24}, vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12}.

  Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere $\sqrt{x}$ enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.
- Her har vi egentlig brukt noe som kalles skuffeprinsippet, dueslagsprinsippet eller på engelsk the pigeon hole principle.

Vi er nå ferdige med opphentingen, og fortsetter der vi slapp på onsdag.

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de surjektive funksjonene:

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de surjektive funksjonene:

Definisjon

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de surjektive funksjonene:

Definisjon

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de surjektive funksjonene:

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

f kalles surjektiv hvis bildemengden til f er hele Y.

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de surjektive funksjonene:

Definisjon

La $f : X \to Y$ være en funksjon.

f kalles surjektiv hvis bildemengden til f er hele Y.

På engelsk brukes ofte betegnelsen onto og på norsk kan vi si at f går fra X på Y.

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

  Da er f surjektiv.

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved
$$f(x) = x^2.$$
Da er f surjektiv.
- $f_A(B) = A \cap B$ er surjektiv som en funksjon fra potensmengden til $\mathcal{E}$ til potensmengden til A.

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved
$$f(x) = x^2.$$
Da er f surjektiv.
- $f_A(B) = A \cap B$ er surjektiv som en funksjon fra potensmengden til $\mathcal{E}$ til potensmengden til A.
- La $PRIM : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $PRIM(n)$ er primtall nr. n.

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved
$$f(x) = x^2.$$
Da er f surjektiv.
- $f_A(B) = A \cap B$ er surjektiv som en funksjon fra potensmengden til $\mathcal{E}$ til potensmengden til A.
- La $PRIM : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være definert ved at $PRIM(n)$ er primtall nr. n.
Da er ikke $PRIM$ en surjektiv funksjon, fordi verdimengden er hele $\mathbb{N}$, mens bildemengden er mengden av primtall.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Enhver funksjon vil være surjektiv hvis vi setter verdiområdet lik bildemengden.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Enhver funksjon vil være surjektiv hvis vi setter verdiområdet lik bildemengden.
- Det er ofte i de tilfellene hvor det er uklart hva bildemengden er at det kan være relevant å spørre seg om en funksjon er surjektiv eller ikke.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Enhver funksjon vil være surjektiv hvis vi setter verdiområdet lik bildemengden.
- Det er ofte i de tilfellene hvor det er uklart hva bildemengden er at det kan være relevant å spørre seg om en funksjon er surjektiv eller ikke.
- Funksjonen på neste side er surjektiv, men det er det svært krevende å vise:

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Vi definerer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Vi definerer $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ved

- $f(n) = m$ hvis $2 < m \leq n$, det finnes a, b og c i $\mathbb{N}$ slik at

$$a^m + b^m = c^m$$

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Vi definerer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved

- $f(n) = m$ hvis $2 < m \leq n$, det finnes a, b og c i $\mathbb{N}$ slik at
$$a^m + b^m = c^m$$
og slik at m er det minste tallet med denne egenskapen.

Funksjoner

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Vi definerer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ved

- $f(n) = m$ hvis $2 < m \leq n$, det finnes a, b og c i $\mathbb{N}$ slik at
$$a^m + b^m = c^m$$
og slik at m er det minste tallet med denne egenskapen.
- $f(n) = n$ hvis det ikke finnes noen slik $m \leq n$.

Funksjoner

Merk

Funksjoner

Merk

- I MAT1030 vil injektive funksjoner spille en større rolle enn surjektive funksjoner.

Funksjoner

Merk

- I MAT1030 vil injektive funksjoner spille en større rolle enn surjektive funksjoner.
- Hvis vi konstruerer digitale representasjoner for elementene i en mengde A, konstruerer vi samtidig en funksjon F fra representantene for elementene i A til A selv.

Funksjoner

Merk

- I MAT1030 vil injektive funksjoner spille en større rolle enn surjektive funksjoner.
- Hvis vi konstruerer digitale representasjoner for elementene i en mengde A, konstruerer vi samtidig en funksjon F fra representantene for elementene i A til A selv.
- Vi vil normalt ønske å vite om vi får representert alle elementene i A (håpløst hvis ikke A er endelig).

Funksjoner

Merk

- I MAT1030 vil injektive funksjoner spille en større rolle enn surjektive funksjoner.
- Hvis vi konstruerer digitale representasjoner for elementene i en mengde A, konstruerer vi samtidig en funksjon F fra representantene for elementene i A til A selv.
- Vi vil normalt ønske å vite om vi får representert alle elementene i A (håpløst hvis ikke A er endelig).
- Dette er det samme som å spørre om F er surjektiv.

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$
- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$
- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å
  1. Finne den digitale representasjonen av a.

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$
- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å
  1. Finne den digitale representasjonen av a.
  2. Beregne den digitale representasjonen av $-a$ fra den digitale representasjonen til a

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$
- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å
  1. Finne den digitale representasjonen av a.
  2. Beregne den digitale representasjonen av $-a$ fra den digitale representasjonen til a
  3. Finne $-a$ ut fra den digitale representasjonen til $-a$.

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at
$$-127 \leq a \leq 127.$$
- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å
  1. Finne den digitale representasjonen av a.
  2. Beregne den digitale representasjonen av $-a$ fra den digitale representasjonen til a
  3. Finne $-a$ ut fra den digitale representasjonen til $-a$.
- Vi ser at det er tre funksjoner involvert her, og vi har bruk for sammensetningen av dem.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- I skolematematikken, og i noen kurs i matematisk analyse, ser vi på sammensetninger av funksjoner definert på $\mathbb{R}$ eller delmengder av $\mathbb{R}$.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- I skolematematikken, og i noen kurs i matematisk analyse, ser vi på sammensetninger av funksjoner definert på $\mathbb{R}$ eller delmengder av $\mathbb{R}$.
- Kjerneregelen for derivasjon forteller oss hvordan vi kan derivere slike sammensetninger.

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   3.1 $y \leftarrow 2y$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   3.1 $y \leftarrow 2y$
   3.2 $x \leftarrow x - 1$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   3.1 $y \leftarrow 2y$
   3.2 $x \leftarrow x - 1$
4. $z \leftarrow 1$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
    3.1 $y \leftarrow 2y$
    3.2 $x \leftarrow x - 1$
4. $z \leftarrow 1$
5. **While** $y > 0$ **do**

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   3.1 $y \leftarrow 2y$
   3.2 $x \leftarrow x - 1$
4. $z \leftarrow 1$
5. **While** $y > 0$ **do**
   5.1 $z \leftarrow 3z + 1$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   - 3.1 $y \leftarrow 2y$
   - 3.2 $x \leftarrow x - 1$
4. $z \leftarrow 1$
5. **While** $y > 0$ **do**
   - 5.1 $z \leftarrow 3z + 1$
   - 5.2 $y \leftarrow y - 1$

Funksjoner

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.

1. *Input* x [x naturlig tall]
2. $y \leftarrow 1$
3. **While** $x > 0$ **do**
   - 3.1 $y \leftarrow 2y$
   - 3.2 $x \leftarrow x - 1$
4. $z \leftarrow 1$
5. **While** $y > 0$ **do**
   - 5.1 $z \leftarrow 3z + 1$
   - 5.2 $y \leftarrow y - 1$
6. *Output* z

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Denne pseudokoden deler seg naturlig i to deler.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Denne pseudokoden deler seg naturlig i to deler.
- Instruksjonene 1. - 3. beregner $y = f(x) = 2^x$.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Denne pseudokoden deler seg naturlig i to deler.
- Instruksjonene 1. - 3. beregner $y = f(x) = 2^x$.
- Instruksjonene 4. - 6. beregner z som en funksjon $z = g(y)$, hvor vi ikke har noen opplagt formel.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- Denne pseudokoden deler seg naturlig i to deler.
- Instruksjonene 1. - 3. beregner $y = f(x) = 2^x$.
- Instruksjonene 4. - 6. beregner z som en funksjon $z = g(y)$, hvor vi ikke har noen opplagt formel.
- Tilsammen vil pseudokoden definere en sammensatt funksjon $z = g(f(x))$.

Funksjoner

Definisjon

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ være to funksjoner.

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ være to funksjoner.

Vi definerer sammensetningen $h = g \circ f$ som funksjonen

$$h : X \rightarrow Z$$

vi får ved først å bruke f på argumentet x og så g på mellomverdien $f(x)$.

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ være to funksjoner.

Vi definerer sammensetningen $h = g \circ f$ som funksjonen

$$h : X \rightarrow Z$$

vi får ved først å bruke f på argumentet x og så g på mellomverdien $f(x)$.

Vi skriver også

$$h(x) = g(f(x)).$$

Funksjoner

Eksempel

Funksjoner

Eksempel

- La $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $f(n)$ er primtall nummer n og la $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $g(m) = m^2$

Funksjoner

Eksempel

- La $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $f(n)$ er primtall nummer n og la $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $g(m) = m^2$

  Da er $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 49$.

Funksjoner

Eksempel

- La $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $f(n)$ er primtall nummer n og la $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $g(m) = m^2$

  Da er $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 49$.

  $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(16) = 53$.

Funksjoner

Eksempel

- La $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $f(n)$ er primtall nummer n og la $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $g(m) = m^2$

  Da er $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 49$.

  $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(16) = 53$.
- Vi ser altså at selv om sammensetningen av funksjonene gir mening for begge rekkefølgene, kan det spille en rolle i hvilken rekkefølge vi setter dem sammen.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

  Da gir det ingen mening å snakke om $f \circ g$ fordi definisjonsområdet til f er mengden av binære representasjoner av naturlige tall og verdiområdet til g er en mengde av naturlige tall.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

  Da gir det ingen mening å snakke om $f \circ g$ fordi definisjonsområdet til f er mengden av binære representasjoner av naturlige tall og verdiområdet til g er en mengde av naturlige tall.

  I MAT1030 er det viktig å skille mellom tall og de forskjellige representasjonene av tallene.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

  Da gir det ingen mening å snakke om $f \circ g$ fordi definisjonsområdet til f er mengden av binære representasjoner av naturlige tall og verdiområdet til g er en mengde av naturlige tall.

  I MAT1030 er det viktig å skille mellom tall og de forskjellige representasjonene av tallene.

  $g \circ f$ gir mening. Definisjonsområdet vil være mengden av binære representasjoner, "mellomområdet" vil være mengden av desimaltallsrepresentasjoner og verdiområdet vil være naturlige tall.

Funksjoner

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

  Da gir det ingen mening å snakke om $f \circ g$ fordi definisjonsområdet til f er mengden av binære representasjoner av naturlige tall og verdiområdet til g er en mengde av naturlige tall.

  I MAT1030 er det viktig å skille mellom tall og de forskjellige representasjonene av tallene.

  $g \circ f$ gir mening. Definisjonsområdet vil være mengden av binære representasjoner, "mellomområdet" vil være mengden av desimaltallsrepresentasjoner og verdiområdet vil være naturlige tall.

  $(g \circ f)(100110) = g(38) = 11$.

Funksjoner

Teorem

Funksjoner

Teorem

La $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være to funksjoner.

Funksjoner

Teorem

La $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være to funksjoner.

La $h = g \circ f$ være sammensetningen av f og g.

Funksjoner

Teorem

La $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være to funksjoner.

La $h = g \circ f$ være sammensetningen av f og g.

a) Hvis både f og g er injektive, er h injektiv.

Funksjoner

Teorem

La $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ være to funksjoner.

La $h = g \circ f$ være sammensetningen av f og g.

a) Hvis både f og g er injektive, er h injektiv.

b) Hvis både f og g er surjektive, er h surjektiv.

Funksjoner

Bevis

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.
$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.
$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.
Siden $\Rightarrow$ er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.
$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.
Siden $\Rightarrow$ er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

b) Anta at f og g er surjektive, og la $z \in Z$ være vilkårlig.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.

   $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.

   Siden $\Rightarrow$ er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

b) Anta at f og g er surjektive, og la $z \in Z$ være vilkårlig.

   Siden g er surjektiv, finnes $y \in Y$ slik at $g(y) = z$.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.

Siden $\Rightarrow$ er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

b) Anta at f og g er surjektive, og la $z \in Z$ være vilkårlig.

Siden g er surjektiv, finnes $y \in Y$ slik at $g(y) = z$.

Siden f er surjektiv, finnes $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Funksjoner

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y))$.

Siden $\Rightarrow$ er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

b) Anta at f og g er surjektive, og la $z \in Z$ være vilkårlig.

Siden g er surjektiv, finnes $y \in Y$ slik at $g(y) = z$.

Siden f er surjektiv, finnes $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Da er $z = g(f(x)) = h(x)$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.
- La $F : X \rightarrow Y$ være funksjonen som til et tall x gir oss den digitale representasjonen av x.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.
- La $F : X \to Y$ være funksjonen som til et tall x gir oss den digitale representasjonen av x.
- La $G : Y \to X$ være funksjonen som til en digital representasjon y av et tall gir oss tallet.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.
- La $F : X \rightarrow Y$ være funksjonen som til et tall x gir oss den digitale representasjonen av x.
- La $G : Y \rightarrow X$ være funksjonen som til en digital representasjon y av et tall gir oss tallet.
- Da er $G(F(x)) = x$ for alle $x \in X$ og $F(G(y)) = y$ for alle $y \in Y$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.
- La $F : X \to Y$ være funksjonen som til et tall x gir oss den digitale representasjonen av x.
- La $G : Y \to X$ være funksjonen som til en digital representasjon y av et tall gir oss tallet.
- Da er $G(F(x)) = x$ for alle $x \in X$ og $F(G(y)) = y$ for alle $y \in Y$.
- Vi sier at G er den inverse av F.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som "opphever" hverandre:

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som "opphever" hverandre:
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definert ved $f(x) = e^x$ og $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definert ved $g(y) = \ln(y)$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som "opphever" hverandre:
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definert ved $f(x) = e^x$ og $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definert ved $g(y) = \ln(y)$.
  2. Tangensfunksjonen $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ og Arcustangens-funksjonen $g : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som "opphever" hverandre:
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definert ved $f(x) = e^x$ og $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definert ved $g(y) = \ln(y)$.
  2. Tangensfunksjonen $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ og Arcustangens-funksjonen $g : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
  3. $f(x) = 2x$ og $g(y) = \frac{y}{2}$

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som "opphever" hverandre:
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ definert ved $f(x) = e^x$ og $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ definert ved $g(y) = \ln(y)$.
  2. Tangensfunksjonen $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \to \mathbb{R}$ og Arcustangens-funksjonen $g : \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
  3. $f(x) = 2x$ og $g(y) = \frac{y}{2}$
- Vi har utallige eksempler på par av funksjoner som representerer "omvendte regningsmåter av hverandre".

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:
- $\cdots, f(-2) = f(-1) = -1,\ f(0) = f(1) = 0,\ f(2) = f(3) = 1, \cdots$

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:
- $\cdots, f(-2) = f(-1) = -1, f(0) = f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1, \cdots$
- Hvis vi skal lage en omvendt funksjon g har vi to valg for $g(1)$, nemlig $g(1) = 2$ og $g(1) = 3$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:
- $\cdots, f(-2) = f(-1) = -1, f(0) = f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1, \cdots$
- Hvis vi skal lage en omvendt funksjon g har vi to valg for $g(1)$, nemlig $g(1) = 2$ og $g(1) = 3$.
- Velger vi $g(1) = 2$, vil $g(f(3)) \neq 3$, og velger vi $g(1) = 3$ får vi $g(f(2)) \neq 2$.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvending av f?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:
- $\cdots, f(-2) = f(-1) = -1, f(0) = f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1, \cdots$
- Hvis vi skal lage en omvendt funksjon g har vi to valg for $g(1)$, nemlig $g(1) = 2$ og $g(1) = 3$.
- Velger vi $g(1) = 2$, vil $g(f(3)) \neq 3$, og velger vi $g(1) = 3$ får vi $g(f(2)) \neq 2$.
- Vi ser at siden f ikke er injektiv, får vi et problem.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være definert ved at $P(n)$ er primtall nummer n i den voksende opplistingen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots .$$

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være definert ved at $P(n)$ er primtall nummer n i den voksende opplistingen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots.$$

- P er injektiv, men P har ingen omvendt funksjon Q.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $P(n)$ er primtall nummer n i den voksende opplistingen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots .$$

- P er injektiv, men P har ingen omvendt funksjon Q.
- Problemet er at vi ikke kan definere eksempelvis $Q(15)$ siden 15 ikke er et primtall og derfor ikke har noe nummer.

Funksjoner

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $P : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ være definert ved at $P(n)$ er primtall nummer n i den voksende opplistingen

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots .$$

- P er injektiv, men P har ingen omvendt funksjon Q.
- Problemet er at vi ikke kan definere eksempelvis $Q(15)$ siden 15 ikke er et primtall og derfor ikke har noe nummer.
- Vi ser at problemet ligger i at O ikke er surjektiv.

Funksjoner

Definisjon

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.
$g : Y \rightarrow X$ kalles en invers til f, eller en omvendt funksjon av f, hvis

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

$g : Y \rightarrow X$ kalles en invers til f, eller en omvendt funksjon av f, hvis

- $f(g(x)) = x$ for alle $x \in X$.

Funksjoner

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

$g : Y \rightarrow X$ kalles en invers til f, eller en omvendt funksjon av f, hvis

- $f(g(x)) = x$ for alle $x \in X$.
- $g(f(y)) = y$ for alle $y \in Y$.

Funksjoner

Teorem

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \to Y$ være en funksjon.

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

Da har f en invers funksjon $g : Y \rightarrow X$ hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \to Y$ være en funksjon.

Da har f en invers funksjon $g : Y \to X$ hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

b) En funksjon f kan ikke ha mere enn en invers.

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \to Y$ være en funksjon.

Da har f en invers funksjon $g : Y \to X$ hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

b) En funksjon f kan ikke ha mere enn en invers.

Definisjon

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \to Y$ være en funksjon.

Da har f en invers funksjon $g : Y \to X$ hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

b) En funksjon f kan ikke ha mere enn en invers.

Definisjon

Hvis $f : X \to Y$ har en invers, skriver vi f^{-1} for den inverse.

Funksjoner

Bevis

Funksjoner

Bevis

- Anta først at $f : X \to Y$ er både injektiv og surjektiv.

Funksjoner

Bevis

- Anta først at $f : X \to Y$ er både injektiv og surjektiv.
  La $y \in Y$.

Funksjoner

Bevis

- Anta først at $f : X \to Y$ er både injektiv og surjektiv.

  La $y \in Y$.

  Siden f er surjektiv, finnes det $x \in X$ slik at $f(x) = y$, og siden f er injektiv finnes det bare en slik x.

Funksjoner

Bevis

- Anta først at $f : X \to Y$ er både injektiv og surjektiv.

  La $y \in Y$.

  Siden f er surjektiv, finnes det $x \in X$ slik at $f(x) = y$, og siden f er injektiv finnes det bare en slik x.

  Da lar vi $g(y) = x$, og g vil være en invers.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
    Derfor er f injektiv.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
    Derfor er f injektiv.
  - La $y \in Y$ og la $x = g(y)$.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
    Derfor er f injektiv.
  - La $y \in Y$ og la $x = g(y)$.
    Da er $y = f(x)$.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
    Derfor er f injektiv.
  - La $y \in Y$ og la $x = g(y)$.
    Da er $y = f(x)$.
    Det følger at f er surjektiv.

Funksjoner

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g.
  - $x \neq y \Rightarrow g(f((x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
    Derfor er f injektiv.
  - La $y \in Y$ og la $x = g(y)$.
    Da er $y = f(x)$.
    Det følger at f er surjektiv.
- Definisjonen under første punkt er den eneste måten å finne en invers på, så det kan ikke finnes flere.

Funksjoner

Oppgave

Funksjoner

Oppgave

a) Vis at hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ begge har inverse f^{-1} og g^{-1}, så vil sammensetningen

$$h = g \circ f$$

også ha en invers.

Funksjoner

Oppgave

a) Vis at hvis $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ begge har inverse f^{-1} og g^{-1}, så vil sammensetningen

$$h = g \circ f$$

også ha en invers.

b) Under antagelsene i a), vis at $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:
- $f : X \to Y$ er injektiv hvis $\forall x \in X \forall y \in X(f(x) = f(y) \to x = y)$.

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:
- $f : X \to Y$ er injektiv hvis $\forall x \in X \forall y \in X(f(x) = f(y) \to x = y)$.
- $f : X \to Y$ er surjektiv hvis $\forall y \in Y \exists x \in X(y = f(x))$

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:
- $f : X \to Y$ er injektiv hvis $\forall x \in X \forall y \in X(f(x) = f(y) \to x = y)$.
- $f : X \to Y$ er surjektiv hvis $\forall y \in Y \exists x \in X(y = f(x))$
- Hvis $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ og $h = g \circ f$ vil

$$\forall x \in X \forall z \in Z(h(x) = z \leftrightarrow \exists y \in Y(y = f(x) \land z = g(y)).$$

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:
- $f : X \rightarrow Y$ er injektiv hvis $\forall x \in X \forall y \in X(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$.
- $f : X \rightarrow Y$ er surjektiv hvis $\forall y \in Y \exists x \in X(y = f(x))$
- Hvis $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ og $h = g \circ f$ vil

$$\forall x \in X \forall z \in Z(h(x) = z \leftrightarrow \exists y \in Y(y = f(x) \wedge z = g(y)).$$

De som ønsker å forstå hvordan kvantorer brukes, bør overbevise seg selv om at dette er riktig.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.
- En lommeregner har eksempelvis knapper for algebraiske operasjoner, trigonometriske funksjoner , logaritme- og eksponensialfunksjoner m.m.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.
- En lommeregner har eksempelvis knapper for algebraiske operasjoner, trigonometriske funksjoner , logaritme- og eksponensialfunksjoner m.m.
- Noen lommeregnere tillater også at vi definerer våre egne funksjoner ved hjelp av sammensatte uttrykk, og tildels enkle programmer.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.
- En lommeregner har eksempelvis knapper for algebraiske operasjoner, trigonometriske funksjoner , logaritme- og eksponensialfunksjoner m.m.
- Noen lommeregnere tillater også at vi definerer våre egne funksjoner ved hjelp av sammensatte uttrykk, og tildels enkle programmer.
- Matematisk sett opererer disse funksjonene på representasjoner av tall og andre størrelser i lommeregneren eller på datamaskinen.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.
- En lommeregner har eksempelvis knapper for algebraiske operasjoner, trigonometriske funksjoner , logaritme- og eksponensialfunksjoner m.m.
- Noen lommeregnere tillater også at vi definerer våre egne funksjoner ved hjelp av sammensatte uttrykk, og tildels enkle programmer.
- Matematisk sett opererer disse funksjonene på representasjoner av tall og andre størrelser i lommeregneren eller på datamaskinen.
- Dette diskuteres i tilstrekkelig detalj i læreboka.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen "funksjoner" i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen “funksjoner” i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen "funksjoner" i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen "funksjoner" i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.
- Skal vi teste om et stort tall n er et primtall utfører vi en algebraisk test på tilfeldig valgte tall $a_1, \ldots, a_k$ mindre enn n.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen "funksjoner" i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.
- Skal vi teste om et stort tall n er et primtall utfører vi en algebraisk test på tilfeldig valgte tall $a_1, \dots, a_k$ mindre enn n.

  For hver test vil svaret *NEI* fortelle oss at n ikke er et primtall, mens svaret *JA* forteller oss at sannsynligheten er $\frac{3}{4}$ for at n er et primtall.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen “funksjoner” i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.
- Skal vi teste om et stort tall n er et primtall utfører vi en algebraisk test på tilfeldig valgte tall $a_1, \ldots, a_k$ mindre enn n.

  For hver test vil svaret *NEI* fortelle oss at n ikke er et primtall, mens svaret *JA* forteller oss at sannsynligheten er $\frac{3}{4}$ for at n er et primtall.
- Denne primtallstesten kan gi forskjellige svar på om n er et primtall, og er derfor ikke en funksjon i matematisk forstand.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen "funksjoner" i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.
- Skal vi teste om et stort tall n er et primtall utfører vi en algebraisk test på tilfeldig valgte tall $a_1, \dots, a_k$ mindre enn n.

  For hver test vil svaret *NEI* fortelle oss at n ikke er et primtall, mens svaret *JA* forteller oss at sannsynligheten er $\frac{3}{4}$ for at n er et primtall.
- Denne primtallstesten kan gi forskjellige svar på om n er et primtall, og er derfor ikke en funksjon i matematisk forstand.
- Ved å la antall vilkårlige deltester være stor, eksempelvis 100, er usikkerheten omkring svaret i størrelsesorden 2^{-200}, så for alle praktiske formål er primtallstesten en funksjon.