

MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 13: Funksjoner

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

25. februar 2008



Opphenting

- Forrige forelesning fortsatte vi innføringen av ekvivalensrelasjoner.
- Vi definerte hva vi mener med partielle ordninger og med totale ordninger.
- Deretter snakket vi generelt om funksjoner og spesielt om injektive funksjoner.
- Det ble mange nye begreper, og før vi fortsetter, skal vi repetere, ved hjelp av eksempler, noen av disse begrepene.
- Vi starter med å se på en funksjon og et par avledede relasjoner.

Eksempel

- La $A = \{1, \dots, 100\}$
- La $f(a)$ være tverrsummen til $a \in A$ når vi antar at vi bruker vanlig titallsystem.
- f er en funksjon, hvor A er **definisjonsområdet**.
- I dette tilfellet har vi ikke bestemt **verdiområdet**, men uten å tenke oss om vet vi at tverrsummen vil være et naturlig tall.
- Vi ser derfor på f som en funksjon

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}$$

Eksempel (Fortsatt)

- Er f injektiv?
- Kravet var at for alle a og b i A , så skal $f(a) \neq f(b)$ når $a \neq b$.
- Men $f(63) = f(72) = 9$, så f er ikke injektiv.
- Kan vi bestemme bildemengden til f ?
- Bildemengden vil være $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 18\}$.

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerer nå to relasjoner på A ved hjelp av f :
- La aRb hvis $f(a) = f(b)$.
- La aSb hvis $f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
 - Er R eller S reflektiv?
 - Er R eller S irreflektiv?
 - Er R eller S symmetrisk?
 - Er R eller S antisymmetrisk?
 - Er R eller S transitiv?

Eksempel (Fortsatt)

- La oss se på R først.
 - Vi ser at R er *refleksiv* fordi $f(a) = f(a)$ for alle $a \in A$.
 - Vi ser at R er *symmetrisk* fordi $f(b) = f(a)$ når $f(a) = f(b)$.
 - Vi ser at R er *transitiv* fordi $f(a) = f(c)$ hvis vi har at $f(a) = f(b)$ og at $f(b) = f(c)$.
 - Siden $A \neq \emptyset$ og R er refleksiv, er ikke R samtidig *irrefleksiv*.
 - Siden f ikke er injektiv og R er symmetrisk, kan ikke R være *antisymmetrisk*.
- Det betyr at R er en **ekvivalensrelasjon**.
- Vi har ikke brukt noen spesielle egenskaper ved A eller f , så relasjoner konstruert på denne måten vil **alltid** være ekvivalensrelasjoner.

Eksempel (Fortsatt)

- Når vi nå vet at R er en ekvivalensrelasjon, kan vi prøve å finne ekvivalensklassene.
- Vi vil ha en ekvivalensklasse for hver tverrsum:
 - ① $\{1, 10, 100\}$
 - ② $\{2, 11, 20\}$
 - ③ $\{3, 12, 21, 30\}$
 - ④ $\{4, 13, 22, 31, 40\}$
 - ⑤ $\{5, 14, 23, 32, 41, 50\}$osv.

Eksempel (Fortsatt)

- La oss så se på egenskapene til S .
- $aSb \Leftrightarrow f(a) < f(b) \vee (aRb \wedge a \leq b)$
 - S er *refleksiv* fordi $aRa \wedge a \leq a$ for alle a
 - La aSb og bSc .
 - Hvis $f(a) < f(b)$ eller $f(b) < f(c)$ vil $f(a) < f(c)$, og aSc .
 - Hvis $f(a) = f(b) = f(c)$ har vi at $a \leq b \leq c$, så da har vi også at aSc .
 - Vi ser at S er transitiv.
 - Anta at aSb og bSa
 - Da må $f(a) \leq f(b)$ og $f(b) \leq f(a)$, så $f(a) = f(b)$, det vil si at aRb .
 - Da er $a \leq b$ og $b \leq a$ så $a = b$
 - Det følger at S er *antisymmetrisk*.
- Konklusjonen er at S er en partiell ordning.
- Oppgave: Vis at S er en total ordning, og skriv ned de 10 S -første tallene.

Eksempel (Injektive funksjoner)

- Vi skal se på tre funksjoner, og spørre om de er injektive:
 - 1 A er alle ord w godkjent som norske ord, og $f(w)$ er ordet w skrevet baklengs.
 - 2 B er mengden av uendelige desimalutviklinger α og $g(\alpha)$ er det tilsvarende reelle tallet.
 - 3 C er mengden av positive reelle tall som har en eksakt 32-bits representasjon r , og hvis r representerer tallet x lar vi $h(r)$ være tallet som representerer \sqrt{x} .
- f vil være injektiv, for hvis vi speiler to forskjellige ord, vil speilbildene bli forskjellige.

Eksempel (Fortsatt)

- g er ikke injektiv fordi noen reelle tall kan ha to forskjellige desimalutviklinger, eksempelvis

$$0,9999\dots = 1,0000\dots$$

- h kan ikke være injektiv fordi hvis et tall ligger mellom 2^{-24} og 2^{24} , vil kvadratroten ligge mellom 2^{-12} og 2^{12} .

Vi har altså langt færre binære tall til disposisjon for å representere \sqrt{x} enn x selv, så funksjonen kan ikke være injektiv.

- Her har vi egentlig brukt noe som kalles **skuffepriippet**, **dueslagspriippet** eller på engelsk **the pigeon hole principle**.

Vi er nå ferdige med opphenting, og fortsetter der vi slapp på onsdag.

Funksjoner

Den neste gruppen av funksjoner vi skal se på er de **surjektive** funksjonene:

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

f kalles **surjektiv** hvis bildemengden til f er hele Y .

På engelsk brukes ofte betegnelsen **onto** og på norsk kan vi si at f går fra X **på** Y .

Eksempel (Surjektive funksjoner)

- La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Da er f surjektiv.

- $f_A(B) = A \cap B$ er surjektiv som en funksjon fra potensmengden til \mathcal{E} til potensmengden til A .
- La $PRIM : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $PRIM(n)$ er primtall nr. n .
Da er ikke $PRIM$ en surjektiv funksjon, fordi verdimengden er hele \mathbb{N} , mens bildemengden er mengden av primtall.

Eksempel (Fortsatt)

- Enhver funksjon vil være surjektiv hvis vi setter verdiområdet lik bildemengden.
- Det er ofte i de tilfellene hvor det er uklart hva bildemengden er at det kan være relevant å spørre seg om en funksjon er surjektiv eller ikke.
- Funksjonen på neste side er surjektiv, men det er det svært krevende å vise:

Eksempel (Surjektive funksjoner)

Vi definerer $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ved

- $f(n) = m$ hvis $2 < m \leq n$, det finnes a, b og c i \mathbb{N} slik at

$$a^m + b^m = c^m$$

og slik at m er det minste tallet med denne egenskapen.

- $f(n) = n$ hvis det ikke finnes noen slik $m \leq n$.

Merk

- I MAT1030 vil injektive funksjoner spille en større rolle enn surjektive funksjoner.
- Hvis vi konstruerer digitale representasjoner for elementene i en mengde A , konstruerer vi samtidig en funksjon F fra representantene for elementene i A til A selv.
- Vi vil normalt ønske å vite om vi får representert alle elementene i A (håpløst hvis ikke A er endelig).
- Dette er det samme som å spørre om F er surjektiv.

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss holde oss til lekedatamaskinen fra innledningen og la a være et helt tall slik at

$$-127 \leq a \leq 127.$$

- Hvis vi skal beregne $f(a) = -a$ på datamaskinen trenger vi å
 - ① Finne den digitale representasjonen av a .
 - ② Beregne den digitale representasjonen av $-a$ fra den digitale representasjonen til a
 - ③ Finne $-a$ ut fra den digitale representasjonen til $-a$.
- Vi ser at det er tre funksjoner involvert her, og vi har bruk for sammensetningen av dem.

Eksempel (Fortsatt)

- I skolematematikken, og i noen kurs i matematisk analyse, ser vi på sammensetninger av funksjoner definert på \mathbb{R} eller delmengder av \mathbb{R} .
- Kjernerregelen for derivasjon forteller oss hvordan vi kan derivere slike sammensetninger.

Eksempel (Sammensatte funksjoner)

- La oss se på følgende pseudokode.
 1. *Input* x [x naturlig tall]
 2. $y \leftarrow 1$
 3. **While** $x > 0$ **do**
 - 3.1 $y \leftarrow 2y$
 - 3.2 $x \leftarrow x - 1$
 4. $z \leftarrow 1$
 5. **While** $y > 0$ **do**
 - 5.1 $z \leftarrow 3z + 1$
 - 5.2 $y \leftarrow y - 1$
 6. *Output* z

Eksempel (Fortsatt)

- Denne pseudokoden deler seg naturlig i to deler.
- Instruksjonene 1. - 3. beregner $y = f(x) = 2^x$.
- Instruksjonene 4. - 6. beregner z som en funksjon $z = g(y)$, hvor vi ikke har noen opplagt formel.
- Tilsammen vil pseudokoden definere en sammensatt funksjon $z = g(f(x))$.

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ være to funksjoner.

Vi definerer **sammensetningen** $h = g \circ f$ som funksjonen

$$h : X \rightarrow Z$$

vi får ved først å bruke f på argumentet x og så g på **mellomverdien** $f(x)$.

Vi skriver også

$$h(x) = g(f(x)).$$

Eksempel

- La $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $f(n)$ er primtall nummer n og la $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $g(m) = m^2$
Da er $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 49$.
 $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(16) = 53$.
- Vi ser altså at selv om sammensetningen av funksjonene gir mening for begge rekkefølgene, kan det spille en rolle i hvilken rekkefølge vi setter dem sammen.

Eksempel (Fortsatt)

- La f sende binærformen til et naturlig tall n over til desimalformen og la g gi oss tverrsummen av desimalformen til et tall.

Da gir det ingen mening å snakke om $f \circ g$ fordi definisjonsområdet til f er mengden av binære representasjoner av naturlige tall og verdiområdet til g er en mengde av naturlige tall.

I MAT1030 er det viktig å skille mellom tall og de forskjellige representasjonene av tallene.

$g \circ f$ gir mening. Definisjonsområdet vil være mengden av binære representasjoner, “mellomområdet” vil være mengden av desimaltallsrepresentasjoner og verdiområdet vil være naturlige tall.

$$(g \circ f)(100110) = g(38) = 11.$$

Teorem

La $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ være to funksjoner.

La $h = g \circ f$ være sammensetningen av f og g .

- a) Hvis både f og g er injektive, er h injektiv.
- b) Hvis både f og g er surjektive, er h surjektiv.

Bevis

a) Anta at f og g er injektive.

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y)).$$

Siden \Rightarrow er *transitiv*, $h(x) = g(f(x))$ og $h(y) = g(f(y))$ følger det at h er injektiv når f og g er det.

b) Anta at f og g er surjektive, og la $z \in Z$ være vilkårlig.

Siden g er surjektiv, finnes $y \in Y$ slik at $g(y) = z$.

Siden f er surjektiv, finnes $x \in X$ slik at $f(x) = y$.

Da er $z = g(f(x)) = h(x)$.

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Med fare for å overfokusere på et tema skal vi nok en gang se på digital representasjon av tall.
- La X være mengden av reelle tall som har en digital representasjon med enkel presisjon.
- La Y være mengden av 32 bits representasjoner av reelle tall.
- La $F : X \rightarrow Y$ være funksjonen som til et tall x gir oss den digitale representasjonen av x .
- La $G : Y \rightarrow X$ være funksjonen som til en digital representasjon y av et tall gir oss tallet.
- Da er $G(F(x)) = x$ for alle $x \in X$ og $F(G(y)) = y$ for alle $y \in Y$.
- Vi sier at G er den **inverse** av F .

Eksempel (Inverse funksjoner)

- Fra skolematematikken og begynneremnene i matematikk har vi flere eksempler på par av funksjoner som “opphever” hverandre:
 - 1 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definert ved $f(x) = e^x$ og $g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ definert ved $g(y) = \ln(y)$.
 - 2 Tangensfunksjonen $f : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ og Arcustangens-funksjonen $g : \mathbb{R} \rightarrow \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.
 - 3 $f(x) = 2x$ og $g(y) = \frac{y}{2}$
- Vi har utallige eksempler på par av funksjoner som representerer “omvendte regningsmåter av hverandre”.

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $f : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{J}$ være definert ved at $f(a)$ er heltallsverdien til $\frac{a}{2}$, det vil si det største hele tallet b slik at $b \leq \frac{a}{2}$.
- Kan vi finne en omvendning av f ?
- La oss regne på noen verdier, og la oss se hva som skjer:
- $\dots, f(-2) = f(-1) = -1, f(0) = f(1) = 0, f(2) = f(3) = 1, \dots$
- Hvis vi skal lage en omvendt funksjon g har vi to valg for $g(1)$, nemlig $g(1) = 2$ og $g(1) = 3$.
- Velger vi $g(1) = 2$, vil $g(f(3)) \neq 3$, og velger vi $g(1) = 3$ får vi $g(f(2)) \neq 2$.
- Vi ser at siden f ikke er injektiv, får vi et problem.

Eksempel (Inverse funksjoner)

- La $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ være definert ved at $P(n)$ er primtall nummer n i den voksende opplistingen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

- P er injektiv, men P har ingen omvendt funksjon Q .
- Problemet er at vi ikke kan definere eksempelvis $Q(15)$ siden 15 ikke er et primtall og derfor ikke har noe nummer.
- Vi ser at problemet ligger i at O ikke er surjektiv.

Definisjon

La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

$g : Y \rightarrow X$ kalles en **invers** til f , eller en **omvendt funksjon** av f , hvis

- $f(g(x)) = x$ for alle $x \in X$.
- $g(f(y)) = y$ for alle $y \in Y$.

Funksjoner

Teorem

a) La $f : X \rightarrow Y$ være en funksjon.

Da har f en invers funksjon $g : Y \rightarrow X$ hvis og bare hvis f er både injektiv og surjektiv.

b) En funksjon f kan ikke ha mere enn en invers.

Definisjon

Hvis $f : X \rightarrow Y$ har en invers, skriver vi f^{-1} for den inverse.

Bevis

- Anta først at $f : X \rightarrow Y$ er både injektiv og surjektiv.

La $y \in Y$.

Siden f er surjektiv, finnes det $x \in X$ slik at $f(x) = y$, og siden f er injektiv finnes det bare en slik x .

Da lar vi $g(y) = x$, og g vil være en invers.

Bevis (Fortsatt)

- Anta så at f har en invers g .
 - $x \neq y \Rightarrow g(f(x)) \neq g(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
Derfor er f injektiv.
 - La $y \in Y$ og la $x = g(y)$.
Da er $y = f(x)$.
Det følger at f er surjektiv.
- Definisjonen under første punkt er den eneste måten å finne en invers på, så det kan ikke finnes flere.

Oppgave

- a) Vis at hvis $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow Z$ begge har inverse f^{-1} og g^{-1} , så vil sammensetningen

$$h = g \circ f$$

også ha en invers.

- b) Under antagelsene i a), vis at $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Funksjoner

- Vi kan bruke kvantorer til å gi presise definisjoner av *injektiv*, *surjektiv* og *sammensetning*:
- $f : X \rightarrow Y$ er **injektiv** hvis $\forall x \in X \forall y \in X (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$.
- $f : X \rightarrow Y$ er **surjektiv** hvis $\forall y \in Y \exists x \in X (y = f(x))$
- Hvis $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ og $h = g \circ f$ vil

$$\forall x \in X \forall z \in Z (h(x) = z \leftrightarrow \exists y \in Y (y = f(x) \wedge z = g(y))).$$

De som ønsker å forstå hvordan kvantorer brukes, bør overbevise seg selv om at dette er riktig.

Funksjoner og programmering

- De fleste programmeringsspråk er utstyrt med predefinerte funksjoner.
- For noen av disse språkene kan man også definere sine egne funksjoner.
- En lommeregner har eksempelvis knapper for algebraiske operasjoner, trigonometriske funksjoner , logaritme- og eksponensialfunksjoner m.m.
- Noen lommeregnere tillater også at vi definerer våre egne funksjoner ved hjelp av sammensatte uttrykk, og tildels enkle programmer.
- Matematisk sett opererer disse funksjonene på representasjoner av tall og andre størrelser i lommeregneren eller på datamaskinen.
- Dette diskuteres i tilstrekkelig detalj i læreboka.

Funksjoner og programmering

- Noen hjelpemidler kan gå under betegnelsen “funksjoner” i en programmeringssammenheng, men er ikke funksjoner i vanlig matematisk forstand.
- De viktigste er de som genererer et tilfeldig element i en mengde.
- Ber vi om en kabal, eller et minesveiperspill, får vi et nytt spill hver gang.
- Skal vi teste om et stort tall n er et primtall utfører vi en algebraisk test på tilfeldig valgte tall a_1, \dots, a_k mindre enn n .

For hver test vil svaret *NEI* fortelle oss at n ikke er et primtall, mens svaret *JA* forteller oss at sannsynligheten er $\frac{3}{4}$ for at n er et primtall.

- Denne primtallstesten kan gi forskjellige svar på om n er et primtall, og er derfor ikke en funksjon i matematisk forstand.
- Ved å la antall vilkårlige deltester være stor, eksempelvis 100, er usikkerheten omkring svaret i størrelsesorden 2^{-200} , så for alle praktiske formål er primtallstesten en funksjon.