

MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 14: Rekursjon og induksjon

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

27. februar 2008



Oppsummering

- Mandag repeterte vi en del om relasjoner, da spesielt om ekvivalensrelasjoner og partielle ordninger.
- Vi snakket videre om funksjoner.
- Det er noen grunnleggende begreper i tilknytning til kapitlet om funksjoner man må kjenne til for å kunne gå eksamensdagen i møte med ro i sinnet.
- Det er
 - Injektive funksjoner, også kalt 1-1-funksjoner eller enentydige funksjoner.
 - Surjektive funksjoner (onto).
 - Sammensetning av funksjoner.
 - Omvendte eller inverse funksjoner.

Oppsummering

Det er også viktig å holde orden på hva som menes med:

- *Definisjonsområdet* til en funksjon.
- *Verdiområdet* til en funksjon.
- *Bildemengden* til en funksjon.

I tillegg bør man kunne vite når

- man kan finne en invers til en funksjon
- man kan sette sammen to funksjoner.

Dette avslutter den abstrakte innføringen i funksjoner.

Før vi går over til neste kapittel skal vi imidlertid se litt på hva det vil si at en funksjon er **beregnbar**.

Beregnbare funksjoner

- IT dreier seg mye om hvordan man løser oppgaver ved hjelp av elektroniske hjelpemidler, fortrinnsvis datamaskiner.
- All IT-aktivitet på maskin-nivå styres av **programmer**, uansett om vi ser dem eller ikke.
- Hvis man skal kunne forstå informasjonsteknologiens begrensninger, må vi derfor forstå grensene for hva det er mulig å skrive programmer for.
- Alle programmer beskriver egentlig funksjoner, selv om noen argumenter (som maskintid, maskinarkitektur o.a.) ikke er synlig.
- Det er derfor av interesse å studere de funksjonene som lar seg uttrykke ved hjelp av programmer.

Beregnbare funksjoner

- Hvis vi begrenser oss til funksjoner fra \mathbb{N}_0 til \mathbb{N}_0 har vi gode matematiske karakteriseringer av de **beregnbare** funksjonene, det vil si de som kan programmeres i et eller annet programmeringsspråk.

$$(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

- Det viser seg at alle programmerbare funksjoner fra \mathbb{N}_0 til \mathbb{N}_0 kan formuleres som en av våre pseudokoder, hvor vi bare bruker navn på tallene 0 og 1, addisjon og multiplikasjon og Booleske tester uttrykt ved hjelp av $=$ og $<$.

Det er ikke uvanlig for logikere eller folk som arbeider med teoretisk databehandling å la de naturlige tallene starte med 0.

Vi skal være snille og holde oss til måten boka gjør det på.

Beregnbare funksjoner

Som en forberedelse til kapittel 7 om induksjon og rekursjon, skal vi se på to pseudokoder hvor vi har pålagt oss å begrense oss til addisjon, multiplikasjon og Booleske tester med $=$ og $<$ (men dermed får lov til å bruke \leq).

- I det første eksemplet skal vi beregne $f(x, y) = \max\{0, x - y\}$.
- I det andre eksemplet skal vi beregne $g(x, y) = x^y$.

Beregnbare funksjoner

Eksempel (Beregnbare funksjoner)

1. *Input* x [$x \in \mathbb{N}_0$]
2. *Input* y [$y \in \mathbb{N}_0$]
3. $z \leftarrow 0$
4. **While** $y < x$ **do**
 - 4.1 $y \leftarrow y + 1$
 - 4.2 $z \leftarrow z + 1$
5. *Output* z

- Vi har ikke snakket om **induksjonsbevis** ennå. Det vil være den naturlige metoden for å vise korrekthet av et slikt program.
- I dette tilfellet ser vi at hvis $x \leq y$ starter vi ikke løkka i det hele tatt, mens hvis $y < x$ “teller” vi y opp til x samtidig som vi øker verdien av z tilsvarende mye.

Beregnbare funksjoner

Eksempel (Beregnbare funksjoner)

1. *Input* x [$x \in \mathbb{N}_0$]
2. *Input* y [$y \in \mathbb{N}_0$]
3. $u \leftarrow 0$
4. $z \leftarrow 1$
5. **While** $u < y$ **do**
 - 5.1 $z \leftarrow z \cdot x$
 - 5.2 $u \leftarrow u + 1$
6. *Output* z

Dette resulterer i at vi multipliserer x med seg selv y ganger, altså at vi beregner x^y .

Beregnbare funksjoner

- I programmeringssammenheng er det ikke alltid så lett å vite når et gitt program med et gitt input faktisk gir oss et output i den mengden hvor vi vil ha det.
- I verste fall kan vi skrive programmer for funksjoner hvor det er umulig å bestemme hva definisjonsområdet er.
- Innenfor IT er det derfor naturlig også å studere **partielle funksjoner** fra en mengde X til en mengde Y .
- Dette vil være funksjoner hvor definisjonsområdet er en delmengde av X og hvor verdiområdet er Y .
- Tolkningen av et program som en funksjon fra et Cartesisk produkt av datatyper til en datatype vil vanligvis være som en partiell funksjon.

OVER TIL KAPITTEL 7

Innledning til rekursjon og induksjon

- Vi skal nå starte på avsnittet om **rekursive** konstruksjoner og bevis ved **induksjon**.
- Dette er det første stedet hvor årets MAT1030 vil omfatte mer stoff enn det læreboka omfatter.
- Det betyr at **forelesningene** er å betrakte som pensum, også der de går ut over rammene til læreboka.
- Alt stoff som er eksamensrelevant vil man finne i læreboka eller i forelesningsnotatene som legges ut på nettet.

Innledning til rekursjon og induksjon

- Læreboka behandler for det meste rekursjon og induksjon over de naturlige tallene \mathbb{N} .
- I en IT-sammenheng finnes det andre **induktivt konstruerte** mengder hvor tilsvarende metoder har mening.
- Vi skal etterhvert se på noen generelle og spesielle eksempler av interesse for IT.
- Vi skal imidlertid først se på rekursjon i en begrenset, men viktig, forstand.

Eksempel

- Vi definerer en funksjon $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ved
 - 1 $f(1) = 2$
 - 2 $f(n + 1) = 2^{f(n)}$ for alle n .
- Vi har ikke definert f ved en formel, så er f veldefinert?

Eksempel (Fortsatt)

- En test kan jo være om vi er i stand til å skrive et program for f !
- Vi kan oppfatte punktene 1. og 2. på forrige side som en **spesifikasjon**.
- Vi har tidligere sett hvordan vi kan finne en pseudokode for $g(z) = 2^z$
- Det betyr at vi kan bruke en instruksjon på formen

$$z \leftarrow 2^y$$

med vissheten om at vi kan erstatte den ene linjen med en pseudokode.

- Da er det lett å lage en pseudokode for f :

Eksempel (Fortsatt)

1. *Input* x [$x \in \mathbb{N}$]
2. $z \leftarrow 2$
3. $i \leftarrow 1$
4. **While** $i < x$ **do**
 - 4.1 $i \leftarrow i + 1$
 - 4.2 $z \leftarrow 2^z$
5. *Output* z

Vi kaller $f(x)$ verdien på 2^{er} -tårnet av høyde x .

Eksempel

- Vårt neste eksempel er en funksjon som brukes mye i matematikk og i sannsynlighetsregning,

$$n \mapsto n!,$$

eller **fakultetsfunksjonen**.

- Vi kan bruke omtrent samme formatet som i forrige eksempel:
 - 1 $1! = 1$
 - 2 $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi kan nærmest kopiere pseudokoden fra forrige eksempel, og få følgende algoritme for beregning av $n!$:

Eksempel (Fortsatt)

1. *Input* x [$x \in \mathbb{N}$]
2. $z \leftarrow 1$
3. $i \leftarrow 1$
4. **While** $i < x$ **do**
 - 4.1 $i \leftarrow i + 1$
 - 4.2 $z \leftarrow z \cdot (i)$
5. *Output* z

Rekursjon

- Læreboka tar utgangspunkt i tallfølger, mens vi tar utgangspunkt i funksjoner.
- Det er i prinsippet ingen forskjell mellom en uendelig tallfølge og en funksjon definert på \mathbb{N}
- Tallfølgen

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots$$

er bare en annen måte å skrive fakultetsfunksjonen på.

- Hvorvidt man i konkrete tilfeller bruker tallfølger eller funksjoner, avhenger av hva som er pedagogisk mest forstandig for anledningen.

Rekursjon

- Kan vi gi en bedre begrunnelse for at de to funksjonene vi har sett på er veldefinerte enn at vi kan finne pseudokoder for dem?
- Svaret er selvfølgelig *JA*.
- Vi kan nå alle naturlige tall ved å
 - ① Starte med 1
 - ② Legge til 1 så mange ganger som nødvendig.
- Hvis vi da definerer en funksjon f ved å bestemme
 - ① hva $f(1)$ er
 - ② hvordan $f(n+1)$ avhenger av $f(n)$ og nhar vi bestemt $f(n)$ for alle n .
- Vi kan oppfatte en konkretisering av punktene 1 og 2 over som en **spesifikasjon**.
- Vi skal se på et eksempel i detalj:

Eksempel

Vi definerer funksjonen $f(n, m)$ ved rekursjon på n ved

① $f(1, m) = 2m - 1$

② $f(n + 1, m) = 2f(n, m) - 1$

- Med tilstrekkelig tålmodighet kan vi finne et uttrykk for $f(n, m)$ for hver enkelt n ved:

Eksempel

$$\textcircled{1} \quad f(1, m) = 2m - 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(2, m) = 2f(1, m) - 1 = 2(2m - 1) - 1 = 4m - 3$$

$$\textcircled{3} \quad f(3, m) = 2f(2, m) - 1 = 2(4m - 3) - 1 = 8m - 7$$

$$\textcircled{4} \quad f(4, m) = 2f(3, m) - 1 = 2(8m - 7) - 1 = 16m - 15$$

...

Vi ser at vi kan gjøre listen av utregninger så lang vi vil, så $f(n, m)$ er definert for alle n og m .

En annen sak er om vi kan vise den formelen som ser ut til å peke seg ut.

Da vil vi få bruk for [induksjonsbevis](#).

Rekursjon

- Læreboka har brukt **For**-løkker der vi har brukt **While**-løkker.
- Forskjellen er kosmetisk.
- Det viktige er at vi bruker en løkke til å fange opp formatet
 - 1 $g(1) = a$
 - 2 $g(n + 1) = f(g(n), n)$
- og at vi har en standard overgang fra en pseudokode for f til en pseudokode for g .
- Vi sier at g er definert fra a og f ved [rekursjon](#).
- Vi beskriver den generelle **For**-løkka på neste side:

Rekursjon

1. *Input* n [$n \in \mathbb{N}$]
2. $x \leftarrow a$
3. **For** $m = 2$ **to** n **do**
 - 3.1 $x \leftarrow f(x, m)$
4. *Output* x

Merk

Vi sier at klassen av funksjoner programmerbare via en pseudokode er **lukket** under *definisjoner ved rekursjon*.

Oppgave

Betrakt følgende pseudokode, hvor det inngår en rekursiv definisjon:

1. *Input* n [$n \in \mathbb{N}$]
2. $x \leftarrow 1$
3. $y \leftarrow 1$
4. $z \leftarrow 1$
5. **For** $m = 2$ **to** n **do**
 - 5.1 $y \leftarrow y + 1$
 - 5.2 **For** $k = 1$ **to** y **do**
 - 5.2.1 $z \leftarrow z + 1$
 - 5.2.2 $x \leftarrow x + z$
6. *Output* x

Oppgave (Fortsatt)

- Følg beregningen og finn verdien på output for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.
- Hvordan tror du denne følgen fortsetter?
- Vil beregningen stoppe uansett hvilket naturlig tall n vi starter med?

Rekursjon

- Til nå har vi bare sett på funksjoner fra \mathbb{N}_0 til \mathbb{N}_0 definert ved rekursjon.
- Filosofien bak hvorfor rekursive definisjoner gir mening gir oss også muligheten til å betrakte andre definisjonsområder:

Eksempel

La $f(2) = 1$

Hvis $n \geq 2$ definerer vi $f(n+1)$ ved

- $f(n+1) = f(n)$ hvis n ikke er et primtall.
- $f(n+1) = f(n) + 1$ hvis n er et primtall.

Da er $f(n)$ definert for alle tall $n \geq 2$ og forteller oss hvor mange primtall det finnes $\leq n$.

Rekursjon

- Foreløpig gir det ikke mening å bruke rekursjon til å definere funksjoner med definisjonsområder som ikke er \mathbb{N} , \mathbb{N}_0 eller $\{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$ for en k .
- Det er imidlertid ingen grunn til at verdiområdet skal bestå av tall, noe vårt neste eksempel vil vise:

Eksempel

- Vi har en klassisk definisjon av **regningsart** R_n nummer n :
- $R_1(x, y) = x + y$
- R_2 defineres rekursivt ved
 - $R_2(0, y) = 0$
 - $R_2(x + 1, y) = R_1(R_2(x, y), y)$
- Hvis $n \geq 2$ og R_n er definert, definerer vi R_{n+1} rekursivt ved
 - $R_{n+1}(0, y) = 1$
 - $R_{n+1}(x + 1, y) = R_n(R_{n+1}(x, y), y)$.

Vi ser at R_1 er addisjon, R_2 er multiplikasjon, R_3 er eksponensiering osv.

Eksempel

- La oss gå tilbake til den rekursive definisjonen

- ① $f(1, m) = 2m - 1$

- ② $f(n + 1, m) = 2f(n, m) - 1$

hvor det er naturlig å gjette på at

$$f(n, m) = 2^n \cdot m - (2^n - 1).$$

- Vi har sett at denne formelen stemmer for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$ da vi regnet ut

Eksempel (Fortsatt)

$$\textcircled{1} \quad f(1, m) = 2m - 1$$

$$\textcircled{2} \quad f(2, m) = 2f(1, m) - 1 = 2(2m - 1) - 1 = 4m - 3$$

$$\textcircled{3} \quad f(3, m) = 2f(2, m) - 1 = 2(4m - 3) - 1 = 8m - 7$$

$$\textcircled{4} \quad f(4, m) = 2f(3, m) - 1 = 2(8m - 7) - 1 = 16m - 15$$

- Hvis vi nu prøver å se om formelen stemmer for $n = 5$ på en slik måte at vi forhåpentligvis finner en forklaring, kan vi regne som følger:

Eksempel (Fortsatt)

$$f(5, m) = 2f(4, m) - 1 = 2(2^4 m - (2^4 - 1)) - 1 =$$

$$2 \cdot 2^4 m - 2(2^4 - 1) - 1 =$$

$$= 2^5 m - 2^5 + 2 - 1 = 2^5 m - (2^5 - 1).$$

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- I denne utregningen har vi bare brukt at $5 = 4 + 1$
- Vi kunne erstattet 4 med en vilkårlig n og 5 med $n + 1$, og fått utregningen

$$\begin{aligned}f(n + 1, m) &= 2f(n, m) - 1 = 2(2^n m - (2^n - 1)) - 1 = \\&= 2 \cdot 2^n m - 2(2^n - 1) - 1 = \\&= 2^{n+1} m - 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} m - (2^{n+1} - 1).\end{aligned}$$

- Dermed har vi gitt det som kalles et **induksjonsbevis** for at formelen vår er riktig.

Induksjonsbevis

- Hvorfor kan vi betrakte argumentet over som et bevis for at formelen holder for alle n ?
- Årsaken er at vi nå vet at vi ved direkte utregning kan bevise formelen hver gang noen gir oss en verdi for n , for eksempel $n = 8$.
- Vi vet nå at formelen holder for $n = 5$ og vi vet at siden den holder for $n = 5$ må den holde for $n = 6$.
- Utregningen vår gir imidlertid at formelen også må holde for $n = 7$ og deretter for $n = 8$.
- Siden vi vet at vi med utholdenhet kan fortsette å tenke slik så langt noen kunne ønske, vet vi at formelen vår må holde for alle n .

Induksjonsbevis

- Den metoden vi har brukt til å bevise en påstand for alle naturlige tall på kalles som sagt **induksjonsbevis**.
- I sin enkleste form kan induksjonsbevis formuleres som:

Definisjon

La $P(n)$ være et predikat med en variabel n for et element i \mathbb{N} .

Anta at vi kan bevise

- 1 $P(1)$
- 2 $\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))$

Da kan vi konkludere $\forall nP(n)$.

Denne måten å bevise $\forall nP(n)$ på kalles **induksjon**.