MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 15: Induksjon og rekursjon, rekurenslikninger

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

3. mars 2008

Rekursjon og induksjon

- Onsdag ga vi endel eksempler på rekursive definisjoner og vi forklarte hva vi mener med induksjonsbevis.
- Vi kommer til å fortsette i dag med å gi eksempler på begge deler.
- Induksjonsbevis er et effektivt matematisk virkemiddel.
- Våre eksempler vil ofte gå ut på å vise at en formel for det generelle leddet i en følge som vi har definert ved rekursjon er riktig.
- I flere eksempler vil den naturlige gangen være

$$\text{Problem} \rightarrow \text{rekursjon} \rightarrow \text{formel} \rightarrow \text{induksjonsbevis.}$$

Induksjonsbevis

Eksempel

- Definer
  - $f(1) = 1$
  - $f(n+1) = 3f(n) + 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Da er $f(1) = 1$, $f(2) = 3 \cdot 1 + 1 = 4$, $f(3) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$ og $f(4) = 3 \cdot 13 + 1 = 40$.

Vi kan fortsette å regne ut $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$ osv. ettersom f er definert ved rekursjon.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Definer
  - $g(1) = 1$
  - $g(n+1) = g(n) + 3^n$

Da er $g(1) = 1$, $g(2) = 1 + 3 = 4$, $g(2) = 4 + 3^2 = 13$ og $g(4) = 13 + 3^3 = 40$.

Vi kan fortsette å regne ut $g(5)$, $g(6)$ osv. , og vil finne ut at så langt vi kan se vil $f(n) = g(n)$.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Det er da naturlig å gjette på at $f(n) = g(n)$ for alle n.
- For å vise det, kan vi prøve å vise at de to rekursive definisjonene er de samme, men vi ser jo at rekursjonsskrittet i de to definisjonene ikke likner på hverandre.
- Vi ser at $g(n)$ er summen i en endelig geometrisk rekke

$$g(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}.$$

- En slik rekke har en kjent sum

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Siden vi sikkert ikke husker hvordan vi kom frem til denne formelen, og siden vi innfører induksjonsbevis i disse forelesningene, viser vi formelen ved induksjon:

  Setter vi $n = 1$ inn i formelen, får vi

  $$\frac{3^n - 1}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1 = g(1)$$

  så formelen stemmer for $n = 1$.

- Anta at formelen stemmer for et tall n, det vil si at

  $$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

Da er

$$g(n+1) = g(n) + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$$

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2} = \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

som viser at formelen også holder for $g(n+1)$.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

Hvis $P(n)$ er utsagnet

$$g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

har vi vist

$P(1)$ for seg

1. $P(1) \to P(2)$
2. $P(2) \to P(3)$
3. $P(3) \to P(4)$

   $\dots$

under ett som spesialtilfeller av $P(n) \to P(n+1)$.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

Da er eksempelvis $P(17)$ en tautologisk konsekvens av alt det vi har bevist.

Prinsippet bak induksjonsbevis er at vi da vet med sikkerhet at $P(n)$ holder for alle n.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

La nå $Q(n)$ være påstanden

$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Vi skal se at vi også kan vise $\forall n Q(n)$ ved induksjon.

Det vil følge at f og g er de samme funksjonene, eller de samme følgene hvis man ønsker å se på det på den måten.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonstarten er grei, siden $f(1) = 1 = g(1)$ og vi vet at formelen holder for g.
- Anta så at
$$f(n) = \frac{3^n - 1}{2}.$$
- Da er
$$f(n+1) = 3 \cdot f(n) + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1$$
$$= \frac{3^{n+1} - 3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$
- Dette viser induksjonskrittet, hvis $Q(n)$ holder, så vil $Q(n+1)$ holde.
- Konklusjonen er at $f(n) = g(n) = \frac{3^n - 1}{2}$ for alle n.

Induksjonsbevis

I læreboka presenteres et klassisk eksempel på bruk av induksjon:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Dette en formel man finner igjen i direkte eller beslektet form i mange viktige sammenhenger.

Eksempelvis er det antallet oppgjør i en enkel serie med n lag.

Vi skal se på noen andre, delvis beslektede eksempler:

Induksjonsbevis

Eksempel

- La $f(n)$ være summen av de første n oddetallene, det vil si at

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

  Da er $f(n) = n^2$,
- Vi skal gi et induksjonsbevis.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- For å vise starten på induksjonen regner vi ut

$$f(1) = \sum_{i=1}^{1}(2i - 1) = 1 = 1^2.$$

- Deretter må vi gjennomføre induksjonskrittet:

  Anta at $f(n) = n^2$ for en n.

  Da er $f(n+1) = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

- Ettersom vi nå har vist både induksjonstarten og induksjonskrittet, følger påstanden ved induksjon.

Induksjonsbevis

Eksempel

- Hvis vi trekker en rett linje gjennom planet, deler vi planet i to.
- Hvis vi trekker en ny linje gjennom planet, deler disse to linjene planet i fire deler.
- Hvis vi prøver oss med tre linjer, greier vi ikke å dele planet i mer enn syv deler,

  og bruker vi fire linjer greier vi maksimalt å dele planet i 11 deler.
- Kan vi finne en formel for hvor mange felter vi maksimalt kan dele planet i ved hjelp av n linjer?

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- La $F(n)$ være antall felter vi kan dele planet opp i ved å bruke n rette linjer.
- Da er $F(1) = 2$.
- Selv om vi ikke kjenner $F(n)$ kan vi uttrykke $F(n+1)$ ved hjelp av $F(n)$:
- La $l_1, \ldots, l_n, l_{n+1}$ være $n+1$ rette linjer slik at $l_1, \ldots, l_n$ deler planet opp i $F(n)$ forskjellige felter.
- Den siste linjen l_{n+1} skjærer hver av de andre linjene høyst en gang, så vi får maksimalt n nye skjæringspunkter.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Skjæringspunktene deler l_{n+1} opp i høyst $n+1$ linjestykker, og hvert av disse linjestykkene deler et av de gamle feltene i to.
- Det betyr at vi får maksimalt $n+1$ nye felter.
- Da er $F(n+1) = F(n) + n + 1$
- Den neste jobben blir å finne en formel for $F(n)$ og så vise den ved induksjon.
- Denne typen formler finner man ofte gjennom prøving og feiling basert på erfaring.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Vi påstår at $F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ og vil vise det ved induksjon:
- Induksjonen starter med $n = 1$:
  $1 + \frac{1(1+1)}{2} = 1 + 1 = 2 = F(1)$.
- La oss så gjennomføre induksjonskrittet:
- Anta at
$$F(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Da er

$$F(n+1) = F(n) + n + 1 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = 1 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

- Skal vi være pedantiske kan vi skrive dette om til

$$1 + \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

- Induksjonskrittet er gjennomført, så påstanden er bevist.

Induksjonsbevis

Oppgave

- Vi vet at vi kan dele planet opp i to felter ved hjelp av en sirkel.
- Vi vet at to sirkler kan skjære hverandre i to punkter
- Vi vet at $2n$ punkter vil dele en sirkel opp i $2n$ buestykker.
- Bruk dette til å definere funksjonen $G(n)$ ved rekursjon, hvor $G(n)$ er antall områder vi kan dele planet opp i ved hjelp av n sirkler.
- Foreslå en formel for $G(n)$ og se om du kan vise den ved induksjon.

Hvorfor forteller svaret på denne oppgaven oss at Venn-diagrammer er uegnet til å studere Boolske kombinasjoner av mange mengder?

Induksjonsbevis

Eksempel

- Enkelte regneoperasjoner tar lengere tid jo større input er.
- Det kan være av interesse å finne ut hvor mange "regneskritt" en oppgave krever, avhengig av hvor stort input er.
- Eksempelvis kan vi prøve å finne ut av hvor mange operasjoner som kreves for å utføre sorteringsalgoritmer i
  - Verste tilfelle
  - I gjennomsnitt

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Vanligvis greier man seg med omtrentlige verdier, men ved behov kan man bruke rekursjon og induksjon til å finne nøyaktige svar.
- Vi kan sortere elementene i en liste ved systematisk å bytte om på naboer som ligger i gal rekkefølge.
- La $S(n)$ være det maksimale antall slike bytter vi må foreta oss for å sortere en liste.
- Vi ser at $S(1) = 0$
- Hvis listen kommer i fullstendig gal rekkefølge, må alle objektene i listen bytte plass med alle andre.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Antall bytter som da trenges for å sortere $n+1$ objekter er $S(n+1) = n + S(n)$, ettersom vi kan risikere at vi må flytte siste objekt i listen til førsteplass (n bytter) og deretter sortere resten av listen ($S(n)$ bytter.)
- Vi ser ved induksjon at $S(n) = \frac{(n-1)n}{2}$.
- Beviset følger ved samme type utregning i induksjonsskrittet som for forrige eksempel, og vi tar det på tavlen (eller som øvelse for de som leser/repeterer denne teksten).

Induksjonsbevis

Merk

- Det forrige eksemplet er ikke helt realistisk, enhver sorteringsalgoritme vil innebære at man foretar en rekke sammenlikninger og skifte av plasser.
- Hvis vi skal analysere hvor tidkrevende en algoritme kan være, må vi vite hvor mange regneskritt som kreves, og hvor lang tid hvert enkelt skritt tar.
- Induksjonsbevis kan inngå som en del av beviset for at en regneprosess kan utføres raskt, eventuelt for at den tar for lang tid.

Induksjonsbevis

Eksempel

- Vi minner om definisjonen av binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!.}$$

- Formelen

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

  kan bekreftes ved enkel regning.
- Den enkle regningen ble gjennomført på tavlen.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- På skolen lærer man at
$$\binom{n}{k}$$
uttrykker på hvor mange måter man kan velge ut k objekter fra en mengde med n objekter på, når $k \leq n$.
- Det er ikke alltid så lett å få med seg begrunnelsen for dette.
- Et alternativ kan være å bruke induksjon.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Vi starter med tilfellet $n = 1$.
- Da er $k = 1$, og det finnes bare en måte å velge ut ett element fra en mengde på ett element. Binomialkoeffisienten er i dette tilfellet 1, så påstanden holder.
- Induksjonstarten er i boks.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Anta så at formelen holder for n og at vi skal finne ut av på hvor mange måter vi kan plukke k elementer ut av en mengde $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ på.
- Hvis $k = n + 1$, finnes det nøyaktig en måte, og

$$1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $k < n + 1$, ser vi på to tilfeller:
  1. a_{n+1} er med i den mengden vi plukker ut.
  2. a_{n+1} er ikke med i den mengden vi plukker ut.
- I det første tilfellet må vi plukke ut $k - 1$ elementer fra

$$\{a_1, \ldots, a_n\},$$

og det kan vi gjøre på

$$\binom{n}{k-1}$$

måter.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- I det andre tilfellet må vi plukke ut k elementer fra

$$\{a_1, \ldots, a_n\},$$

  og det kan vi gjøre på

$$\binom{n}{k}$$

  måter.

- Summen er da

$$\binom{n+1}{k}.$$

  som angir det totale antall måter vi kan plukke ut k elementer fra en mengde med n elementer på.

Induksjonsbevis

Eksempel (Fortsatt)

- Induksjonskrittet sier at hvis binomialkoeffisientene $\binom{n}{k}$ forteller oss, for alle $k \leq n$, hvor mange forskjellige delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer, så vil koeffisientene $\binom{n+1}{k}$ fortelle oss det samme for mengder med $n+1$ elementer.
- Vi kan merke oss at for å vise induksjonskrittet for en k trenger vi induksjonsantagelsen både for k og for $k-1$.

Induksjonsbevis

- Både rekursjon og induksjon er mere generelle fenomener enn det vi har gitt inntrykk av her.
- Dette skal vi komme tilbake til, både ved å se på rekurrenslikninger og på rekursjon og induksjon over andre matematiske strukturer enn $\mathbb{N}$ eller $\mathbb{N}_0$.
- Først skal vi imidlertid se på en logikers forklaring på sammenhengen mellom induksjon og rekursjon:
- Anta at vi i utgangspunktet ikke har lært om induksjonsbevis.
- Anta videre at $P(k)$ er et predikat og at vi har bevis for
  1. Induksjonstarten $P(1)$
  2. Induksjonskrittet $P(k) \rightarrow P(k+1)$ hvor k er en variabel.

Induksjonsbevis

- Ved *rekursjon* kan vi da konstruere et bevis $B(n)$ for $P(n)$ for enhver n ved
  1. La $B(1)$ være beviset vi har for $P(1)$
  2. La $B(n+1)$ være bygget opp av $B(n)$, beviset vi får for $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ved å sette inn n for k i beviset for induksjonskrittet, og bruk av den utsagnslogiske regelen om at fra A og $A \rightarrow B$ kan vi slutte B.
- Når vi vet at vi kan konstruere enkeltbevis for hver $P(n)$, kan vi rasjonalisere virksomheten vår og kalle dette et bevis for $\forall n P(n)$.

Rekurrens

- Det i enhver sammenheng mest brukte eksemplet på rekurrens er definisjonen av Fibonacci-tallene:
    - $F(1) = 1$
    - $F(2) = 1$
    - $F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at denne tallfølgen også er fullstendig bestemt, selv om definisjonen ikke helt følger formatet til definisjoner ved rekursjon.
    1. $F(1) = 1$
    2. $F(2) = 1$
    3. $F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$
    4. $F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$
    5. $F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$

    $\ldots$

Rekurrens

- Det er ingen grenser for hvor langt vi kan fortsette:

  $F(6) = 8$, $F(7) = 13$, $F(8) = 21$, $F(9) = 34$, $\cdots$.
- Spørsmålet er om vi kan finne en eksplisit formel for $F(n)$, og helst om vi kan basere dette på en generell forståelse.
- Dette skal vi komme tilbake til.

  Vi skal se på et par andre eksempler først.

Rekurrens

Eksempel

- Likningen

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

  bestemmer ikke tallfølgen $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $\cdots$ fullstendig, men hver gang vi bestemmer oss for hva $F(1)$ og $F(2)$ skal være, blir følgen bestemt ved rekurrens.
- En slik likning kaller vi en Rekurrenslikning.
- Ved direkte regning kan vi se at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = (-1)^n$ begge tilfredstiller likningen:
- $2^{n+1} + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} + 2^{n+1} = 2^{n+2}$
- $(-1)^{n+1} + 2 \cdot (-1)^n = (-1)^n(-1+2) = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^{n+2}$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis nå A og B er to reelle tall, ser vi at vi også har at

$$F_3(n) = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

  er en løsning.
- Er det nå noen grunn til å lete etter flere løsninger?
- Svaret er *NEI*, for vi vet at hvis vi bestemmer $F(1) = a$ og $F(2) = b$, har vi bestemt følgen fullstendig.
- Likningene $a = A \cdot 2^1 + B \cdot (-1)^1$ og $b = A \cdot 2^2 + B \cdot (-1)^2$ vil bestemme A og B, slik at løsningen i et konkret tilfelle er en av de vi har sett på.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

- $$A = \frac{a+b}{6}$$
- $$B = \frac{2b-a}{3}$$

- Det neste spørsmålet er da selvfølgelig hvordan vi fant på å prøve potenser av 2 og -1.