MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 16: Rekurrenslikninger

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

5. mars 2008

Rekurrens

INGEN PLENUMSREGNING 6/3 og 27/3

Rekurrens

- Mandag ga vi en rekke eksempler på bruk av induksjonsbevis og rekursivt definerte funksjoner.
- I et av eksemplene definerte vi binomialkoeffisientene og viste en viktig egenskap til binomialkoeffisienter ved induksjon.
- Både definisjonen og den viste egenskapen er å betrakte som pensum.
- Det siste kvarteret snakket vi om rekurrens.
- Etter forelesningen spurte en av studentene om hva forskjellen mellom rekurrenslikninger og differenslikninger er.
- Svaret er at det ikke er noen forskjell, og at de som har lært teori om differenslikninger kan overføre det til rekurrenslikninger.
- Vi skal nå fortsette med noen eksempler som tilnærming til en generell metode for å løse rekurrenslikninger.

Rekurrens

Eksempel

- Vi skal lete etter løsninger av rekurrenslikningen

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

- Vi viser først ved regning at $F_1(n) = 2^n$ og $F_2(n) = 3^n$ er løsninger:
- $5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 2^2 = 2^{n+2}$
- $5 \cdot 3^{n+1} - 6 \cdot 3^n = 3^n(5 \cdot 3 - 6) = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$
- Det som gjør at denne utregningen fører frem er at 2 og 3 er løsninger av likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

  og det er de eneste løsningene.
- Det betyr at man må kunne løse 2. gradslikninger for å kunne løse slike rekurrenslikninger.

Rekurrens

I stedet for å skrive at

$$F(n+2) = F(n+1) + 2F(n)$$

skal gjelde for alle $n \in \mathbb{N}$
kan vi skrive at

$$F(n) - F(n-1) - 2F(n-2) = 0$$

for alle $n \geq 2$,
og i stedet for å skrive at

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$
kan vi skrive at

$$F(n) - 5F(n-1) + 6F(n-2) = 0$$

for alle $n \geq 2$.

Rekurrens

Dette er strengt tatt uendelig mange likninger i uendelig mange variable $F(n)$, men det gir mening å snakke om løsningsmengden til dette likningsettet.

Vi vil nå etablere den terminologien vi skal bruke i fortsettelsen, og vise hvordan vi kan finne løsningsmengden til slike *rekurrenslikninger*.

Rekurrens

Definisjon

- En 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning er en *funksjonslikning* på formen

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0.$$

- En *følge* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ er en løsning av rekurrenslikningen hvis $aF(n) + bF(n-1) + cF(n-2) = 0$ for alle $n \geq 2$.
- Hvis verdiene for $t(1)$ og/eller $t(2)$ er angitt i tillegg, kalles dette initialbetingelser.
- En løsning må da tilfredstille disse betingelsene.

Rekurrens

Eksempel

- Fibonacci-følgen er bestemt som den eneste løsningen $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ av

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

med initialbetingelser $t(1) = t(2) = 1$

- Vi skal finne en formel for $F(n)$ når vi har utviklet metoden for det.

Rekurrens

Merk

- Vi kaller rekurrenslikningen lineær fordi likningens venstre side er en lineær kombinasjon av $t(n)$, $t(n-1)$ og $t(n-2)$

  Eksempelvis vil ikke $t(n) - (t(n-1))^2 - t(n-2)$ være lineær.

- Vi kaller likningen homogen fordi vi ikke har noe ledd som bare avhenger av n.

  Eksempelvis er ikke $t(n) - t(n-1) + 0 \cdot t(n-2) + n = 0$ homogen.

- Likningen er 2. ordens fordi verdien av $t(n)$ avhenger av to verdier $t(n-1)$ og $t(n-2)$.

  $t(n) - 2t(n-1) = 0$ er 1. ordens, mens
  $t(n) - t(n-1) + t(n-2) - t(n-3) = 0$ er 3. ordens.

Rekurrens

Merk (Fortsatt)

- Alt vi sier vil kunne gjøres gjeldende for 1. ordens og 3. ordens homogene, lineære likninger også, men vi skal konsentrere oss om de 2. ordens likningene.
- For enkelthets skyld vil vi bruke betegnelsen rekurrenslikning i betydningen 2. ordens lineær homogen rekurrenslikning, ettersom vi vil begrense oss til denne typen rekurrenslikninger.

Rekurrens

- Da vi analyserte mulige løsninger av likningen

$$F(n+2) = 5F(n+1) - 6F(n)$$

  kommenterte vi at vi utnyttet at 3 og 2 er løsninger i likningen

$$x^2 = 5x - 6$$

  da vi viste at $F_1(n) = 3^n$ og $F_2(n) = 2^n$ er løsninger av rekurrenslikningen.
- Denne innsikten skal vi utvikle til en fullstendig innsikt i hvilke løsninger vi har:

Rekurrens

Definisjon

Hvis

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

er en rekurrenslikning, kalles

$$ax^2 + bx + c = 0$$

for den karakteristiske likningen til rekurrenslikningen.

Rekurrens

Teorem

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurenslikning og la $r \in \mathbb{R}$.

Da er $F_r(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen hvis og bare hvis r er en løsning av den *karakteristiske* likningen.

Rekurrens

Bevis

Anta at r er en løsning av den karakteristiske likningen.

Vi setter F_r inn i likningene, og får

$$ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} = r^{n-2}(ar^2 + br + c) = 0,$$

det siste fordi r er løsning av den karakteristiske likningen.

Anta så at $F_r(n) = r^n$ løser rekurrenslikningen.

Setter vi inn for $n = 2$ får vi spesielt

$$ar^2 + br^1 + cr^0 = 0$$

som akkurat sier at $ar^2 + br + c = 0$.

Rekurrens

Merk

- Vi kunne ha problematisert tilfellet hvor $r = 0$.
- Argumentet virker bare under antagelsen om at $0^0 = 1$, $0^n = 0$ når $n > 0$.
- Vi får bare $r = 0$ som løsning av den karakteristiske likningen når $c = 0$, hvilket egentlig betyr at vi har en 1. ordens rekurrenslikning.
- Da er alle løsningene på formen $F(n) = A \cdot r^n$, hvor r er den andre løsningen av den karakteristiske likningen.
- Konstantfølgen 0 er alltid en løsning av en rekurrenslikning uten initialbetingelser.

Rekurrens

Dette resultatet forteller oss at vi ofte kan finne to løsninger av en rekurrenslikning.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen inneholder kvadratrot-tegn, vil de eksakte formlene for løsningene gjøre det samme.

Hvis løsningene av den karakteristiske likningen er komplekse tall, vil vi trenge komplekse tall for å beskrive løsningene av rekurrenslikningen.

Vi har imidlertid fortsatt bare to løsninger. Hvordan finner vi flere?

Setningen på neste side er et godt hjelpemiddel.

Rekurrens

Teorem

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurrenslikning ,

og la $F(n)$ og $G(n)$ være to løsninger.

La A og B være reelle tall.

Da er $H(n) = A \cdot F(n) + B \cdot G(n)$ også en løsning.

Rekurrens

Bevis

- Det er bare å sette H inn i rekurrenslikningen og sjekke:

$$
\begin{aligned}
& a \cdot H(n) + b \cdot H(n-1) + c \cdot H(n-2) \\
& = a(A \cdot F(n) + B \cdot G(n)) + b(A \cdot F(n-1) \\
& + B \cdot G(n-1)) + c(A \cdot F(n-2) + B \cdot G(n-2)) \\
& = A \cdot (a \cdot F(n) + b \cdot F(n-1) + c \cdot F(n-2)) \\
& + B \cdot (a \cdot G(n) + b \cdot G(n-1) + c \cdot G(n-2)) \\
& = A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

Rekurrens

Eksempel

- La oss gå tilbake til likningen for Fibonacci-tallene:

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - x - 1 = 0$$

og ved abc-formelen har vi løsninger

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi bør lete etter en løsning på formen

$$F(n) = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Vi vet at hvis vi finner A og B slik at initialbetingelsene $F(1) = F(2) = 1$ holder, så må vi ha funnet den eneste løsningen som finnes.

Det gir oss to stygge lineære likninger i de ukjente A og B

$$A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$A(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + B(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1$$

Den som vil løse disse likningene selv, bør lukke øynene på neste side, hvor vi gir løsningene uten mellomregning.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Løsningene er

$$A = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

og

$$B = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

så formelen for n'te Fibonaccitall $F(n)$ er, utrolig nok,

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

For hver verdi av n er altså dette et naturlig tall.

Rekurrens

- Hvis den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger r og s, vil alle løsningene av rekurrenslikningen være på formen

$$F(n) = A \cdot r^n + B \cdot s^n.$$

- Det er fordi hvis vi i tillegg bestemmer verdiene på $F(1)$ og $F(2)$, vil vi kunne løse likningsettet

$$A \cdot r + B \cdot s = F(1)$$

$$A \cdot r^2 + B \cdot s^2 = F(2).$$

- Dermed finner vi en løsning på formen $F(n) = Ar^n + Bs^n$ som oppfyller initialbetingelsene.
- Vi skal regne gjennom et type-eksempel.

Rekurrens

Eksempel

- Anta at vi skal løse følgende oppgave:
  a) Finn alle løsningene av rekurrenslikningen

  $$t(n) - 2t(n-1) - 3t(n-2) = 0.$$

  b) Finn løsningen fra a) som tilfredstiller initialbetingelsene $F(1) = 1$ og $F(2) = 2$.
- Det første vi må gjøre er å finne den karakteristiske likningen

  $$x^2 - 2x - 3 = 0$$

  og løse den:

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- $$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$
- Siden den karakteristiske likningen har to løsninger, vet vi at den generelle løsningen av rekurrenslikningen er $F(n) = A \cdot 3^n + B \cdot (-1)^n$.
- Dette løser a).

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- For å løse b), må vi bestemme A og B slik at initialbetingelsene holder.
- Det betyr at vi må løse likningene
  - $3A - B = 1$ ($n = 1$, $F(1) = 1$ var en betingelse.)
  - $9A + B = 2$ ($n = 2$, $F(2) = 2$ var en betingelse.)
- Legger vi sammen likningene, får vi $12A = 3$, så $A = \frac{1}{4}$ er en løsning.
- Setter vi denne løsningen inn i en av likningene og løser med hensyn på B, får vi $B = -\frac{1}{4}$
- Løsningen på oppgave b) er derfor

$$F(n) = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n).$$

Rekurrens

- I det forrige eksemplet så vi hvordan vi kan løse enhver rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen har to forskjellige løsninger.
- Hva gjør vi hvis det bare finnes en løsning?
- Fortsatt vil det være slik at hvis vi kan finne to "uavhengige" følger som løsninger, vil alle andre løsninger være kombinasjoner av disse.
- Hvis r er løsningen på den karakteristiske likningen, er fortsatt $F(n) = r^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- Målet vårt må derfor være å finne en annen løsning i tillegg.

Rekurrens

Eksempel

- Betrakt rekurrenslikningen

$$t(n) - 4t(n-1) + 4t(n) = 0.$$

- Den karakteristiske likningen er

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

- $r = 2$ er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen.
- Da er $F(n) = 2^n$ en løsning av rekurrenslikningen.
- La oss gi to initialbetingelser for å se om det finnes noe mønster som antyder hvordan en annen løsning kan se ut:

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- $G(1) = 1$ og $G(2) = 0$:

  Regning gir oss at

  $G(3) = -4$, $G(4) = -16$, $G(5) = -48$ og $G(6) = -128$

  Hvis vi nå prøver å sette faktoren 2^n utenfor $G(n)$, får vi at

  $G(1) = 2^{-1} \cdot 2^1$, $G(2) = 0 \cdot 2^2$, $G(3) = -2^{-1} \cdot 2^3$,
  $G(4) = -2 \cdot 2^{-1} \cdot 2^4$, $G(5) = -3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^5$ og $G(6) = -4 \cdot 2^{-1} \cdot 2^6$.

  Det vil være naturlig å gjette på at $G(n) = (2-n) \cdot 2^{-1} \cdot 2^n$ er løsningen av rekurrenslikningen.

  Vi skal se at det er tilfelle.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi har rettet riktig, vil $H(n) = n \cdot 2^n$ også være en løsning av rekurrenslikningen, siden H kan skrives som en kombinasjon av vårt forslag til $G(n)$ og av $F(n)$
- Omvendt, hvis $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er $G(n)$ en kombinasjon av $F(n)$ og $H(n)$, så da er $G(n)$ en løsning av rekurrenslikningen (og den som oppfyller initialbetingelsene).
- I så fall er svaret så pent at det er verd et forsøk med et generelt bevis.

Rekurrens

Teorem

La

$$at(n) + bt(n-1) + ct(n-2) = 0$$

være en rekurrenslikning hvor den karakteristiske likningen bare har en løsning r.

Da er $H(n) = nr^n$ en løsning av rekurrenslikningen.

Rekurrens

Bevis

Løsningen av den karakteristiske likningen er

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Siden det bare er en løsning er $b^2 = 4ac$, fordi det som står under rottegnet må være null..

Vi setter $H(n)$ inn i likningen, og får

1. $anr^n + b(n-1)r^{n-1} + c(n-2)r^{n-2}$
2. $= r^{n-2}(anr^2 + bnr - br + cn - 2c)$
3. $= r^{n-2}(n(ar^2 + br + c) - br - 2c)$
4. $= -r^{n-2}(br + 2c).$

Rekurrens

Bevis (Forklaring)

- I linje 1 setter vi $H(n)$ inn i likningen.
- I linje 2 setter vi den felles faktoren r^{n-2} utenfor samtidig som vi løser opp parentesene $(n-1)$ og $(n-2)$.
- I linje 3 setter vi n utenfor de leddene hvor n er faktor.
- I linje 4 utnytter vi at r er en løsning av den karakteristiske likningen, så $ar^2 + br + c = 0$.
- For å vise at $H(n)$ er en løsning av rekurrenslikningen, er det altså nok å vise at $br + 2c = 0$
- Her skal vi bruke at r er den eneste løsningen.

Rekurrens

Bevis (Fortsatt)

- Siden vi har en 2. ordens likning, vil $a \neq 0$ og $c \neq 0$.
- Siden vi bare har en løsning, er

$$r = \frac{-b}{2a}.$$

- Setter vi dette inn i $br + 2c$ får vi

$$b \cdot \frac{-b}{2a} + 2c.$$

Rekurrens

Bevis (Fortsatt)

- Satt på felles brøkstrek er dette

$$\frac{-b^2 + 4ac}{2a}$$

  som er lik 0 fordi $b^2 - 4ac = 0$.
- Det var det som gjensto å bevise, så teoremet er vist.

Rekurrens

Merk

Vi har nå funnet to løsninger av rekurrenslikningen både i det tilfellet hvor den karakteristiske likningen har to løsninger, og i det tilfellet hvor den bare har en løsning.

Siden vi kan finne en lineær kombinasjon av slike løsninger for enhver initialbetingelse $t(1) = a$ og $t(2) = b$, har vi i realiteten funnet en generell løsning.

Hvis r og s er to forskjellige løsninger av den karakteristiske likningen, er

$$F(n) = Ar^n + Bs^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Rekurrens

Merk (Fortsatt)

Hvis r er den eneste løsningen av den karakteristiske likningen er

$$F(n) = (A + Bn)r^n$$

den generelle løsningen av rekurrenslikningen.

Rekurrens

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:
- La $t(n) - t(n-1) + \frac{1}{4}t(n-2) = 0$ være en rekurrenslikning.

a) Finn den generelle løsningen $F(n)$ til likningen.

b) Finn løsningen $G(n)$ som oppfyller at $G(1) = G(2) = 1$.

c) Finn løsningen $H(n)$ som oppfyller at $H(1) = 1$ og $H(2) = 0$.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

Først må vi finne den karakteristiske likningen
$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.
Vi finner at $r = \frac{1}{2}$ er den eneste løsningen.
Da er den generelle løsningen

$$F(n) = (A + nB)(\frac{1}{2})^n.$$

Dette løser a)

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

For å løse punkt b), bruker vi de to initialbetingelsene til å finne to likninger med A og B som ukjente

- $n = 1$: $(A + B)\frac{1}{2} = 1$, det vil si $A + B = 2$.
- $n = 2$: $(A + 2B)(\frac{1}{2})^2 = 1$, det vil si $A + 2B = 4$.

Disse har løsninger $A = 0$ og $B = 2$, så svaret på b) er

$$G(n) = 2n(\frac{1}{2})^n.$$

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

For å løse c) setter vi 1 og 0 i høyresidene i likningene over, og får

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 4$

som har $A = 4$ og $B = -2$ som løsninger.

Løsningen på c) er derfor

$$H(n) = (4 - 2n)(\frac{1}{2})^n.$$

Rekurrens

Spiller så rekurrenslikninger noen rolle i informatikken?

Hvis man skal analysere kompleksiteten av en algoritme, det vil si finne ut av hvor mange regneskritt som trenges som funksjon av størrelsen på input, risikerer man at resultatet blir en inhomogen rekurenslikning. (Dette er observert på vitenskapelig foredrag om temaet).

Da vil regnetiden vokse eksponensielt med størrelsen på input.

Hvis grunntallet i denne eksponenten ikke er så mye større enn 1, er ikke det nødvendigvis ødeleggende for nytten av algoritmen.

Det er stor forskjell på en algoritme hvor regnetiden er begrenset av $1000(1,08)^n$ og en der regnetiden er begrenset av $2(1,23)^n$, hvor n er antall bit i input. n trenger ikke å være så veldig stor før den første trolig er mer effektiv enn den andre.

Rekurrens

Eksempel

- En litt håpløs måte å sende en kryptert binær sekvens på vil være å sende 10 eller 01 valgt vilkårlig der det skulle stått 1 og 0 der det skulle stått 0.
- Det er da opp til mottageren, som er den eneste som kjenner krypteringsmåten, å liste opp alle mulige opprinnelige meldinger og finne den som gir mening.
- Hva er det maksimale antall $F(n)$ opprinnelige meldinger som kan ligge bak en mottatt bitsekvens av lengde n?

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis $n = 1$ har vi bare en mulighet, den sendte biten er 0
- Hvis $n = 2$ har vi to muligheter, bitsekvensen representerer 1 eller bitsekvensen representerer 00.
- For $n \geq 2$ har vi to muligheter:
  - Siste siffer er 0 og representerer en 0. Det totale antall muligheter i den situasjonen er $F(n-1)$ ettersom resten av meldingen også skal representere en bitsekvens.
  - De siste to sifrene representerer 1. Dette svarer egentlig til $F(n-2)$ muligheter totalt.

Rekurrens

Eksempel (Fortsatt)

- Svaret på problemet får vi ved å løse rekurrenslikningen

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2)$$

  med initialbetingelser $t(1) = 1$ og $t(2) = 2$
- Løsningen er da at $F(n)$ er Fibonaccitall nr. $n+1$, noe som viser at metoden er svært upraktisk.

Rekurrens

- Vi har vært lojale mot læreboka og latt løsninger av rekurrenslikninger være følger, eller funksjoner definert på $\mathbb{N}$.
- Det er imidlertid ikke noe i veien for at vi ser på løsninger definert på hele $\mathbb{J}$, eller fra 0 og oppover.
- Vi kan tolke likningen

$$t(n) - t(n-1) - t(n-2) = 0$$

  for Fibonacci-følgen som en likning der n varierer over hele $\mathbb{J}$.
- Det ville eksempelvis gitt oss at vi kan finne $F(0)$ fra

$$F(2) - F(1) - F(0) = 0,$$

  hvilket gir $F(0) = 0$.

Rekurrens

- Vi kan godt fortsette nedover med $F(1) - F(0) - F(-1) = 0$ og finne at $F(-1) = 1$.
- Den praktiske nytten vil være at det ofte er enklere å bestemme løsningen til en rekurrenslikning med initialverdier fra $F(0)$ og $F(1)$ fordi de lineære likningene vil bli penere.
- Hvis s og r er løsninger av den karakteristiske likningen, kan vi finne A og B fra
  - $A + B = F(0)$
  - $Ar + Bs = F(1)$
- Har vi bare en løsning r, er forenklingen ved å gå til $F(0)$ enda større.
  - $A = F(0)$
  - $(A + B)r = F(1)$
- Bruker man rekurrenslikningen til å regne ut $F(0)$ er dette en lovlig måte å løse oppgaver på.