MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 18: Generell rekursjon og induksjon

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

12. mars 2008

Generell induksjon og rekursjon

- Mandag så vi på induktivt definerte mengder og noen eksempler på funksjoner definert ved rekursjon over oppbyggingen av elementene i en slik induktivt definert mengde.

Generell induksjon og rekursjon

- Mandag så vi på induktivt definerte mengder og noen eksempler på funksjoner definert ved rekursjon over oppbyggingen av elementene i en slik induktivt definert mengde.
- Vi så på mengden av ord over et alfabet, og på hvordan visse operasjoner på ord kunne defineres ved hjelp av rekursjon.

Generell induksjon og rekursjon

- Mandag så vi på induktivt definerte mengder og noen eksempler på funksjoner definert ved rekursjon over oppbyggingen av elementene i en slik induktivt definert mengde.
- Vi så på mengden av ord over et alfabet, og på hvordan visse operasjoner på ord kunne defineres ved hjelp av rekursjon.
- Avsluttningsvis definerte vi mengden av utsagnslogiske formler hvor vi begrenser oss til utsagnsvariablene p, q og r, og til bindeordene $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.

Generell induksjon og rekursjon

- Mandag så vi på induktivt definerte mengder og noen eksempler på funksjoner definert ved rekursjon over oppbyggingen av elementene i en slik induktivt definert mengde.
- Vi så på mengden av ord over et alfabet, og på hvordan visse operasjoner på ord kunne defineres ved hjelp av rekursjon.
- Avsluttningsvis definerte vi mengden av utsagnslogiske formler hvor vi begrenser oss til utsagnsvariablene p, q og r, og til bindeordene $\neg$, $\wedge$ og $\vee$.
- Vi så hvordan utarbeidelsen av sannhetsverditabellen til en formel kan oppfattes som en rekursiv prosess, vi bygger den opp nedenfra ved å gå til mer og mer komplekse formler.

Generell induksjon og rekursjon

- I vårt neste eksempel skal vi se på en definisjon hvor vi bruker simultan rekursjon.

Generell induksjon og rekursjon

- I vårt neste eksempel skal vi se på en definisjon hvor vi bruker simultan rekursjon.
- Simultan rekursjon innebærer at vi definerer to funksjoner f og g samtidig ved rekursjon.

Generell induksjon og rekursjon

- I vårt neste eksempel skal vi se på en definisjon hvor vi bruker simultan rekursjon.
- Simultan rekursjon innebærer at vi definerer to funksjoner f og g samtidig ved rekursjon.
- For å illustrere hva vi mener med "samtidig" skal vi se på et enkelt eksempel:

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- La $g(n+1) = f(n) + g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- La $g(n+1) = f(n) + g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at da kan vi regne ut $f(2) = 1 \cdot 2$ og $g(2) = 1 + 2 = 3$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- La $g(n+1) = f(n) + g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at da kan vi regne ut $f(2) = 1 \cdot 2$ og $g(2) = 1 + 2 = 3$.
- Da er $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ mens $g(3) = 2 + 3 = 5$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- La $g(n+1) = f(n) + g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at da kan vi regne ut $f(2) = 1 \cdot 2$ og $g(2) = 1 + 2 = 3$.
- Da er $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ mens $g(3) = 2 + 3 = 5$.
- Slik kan vi fortsette å regne ut resultatene parvis, men vi kommer ingen vei hvis vi bare prøver å regne ut verdiene til f eller bare verdiene til g, vi må regne ut begge funksjonene *simultant*, det vil si *samtidig*.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La $f(1) = 1$
- La $g(1) = 2$
- La $f(n+1) = f(n) \cdot g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- La $g(n+1) = f(n) + g(n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
- Vi ser at da kan vi regne ut $f(2) = 1 \cdot 2$ og $g(2) = 1 + 2 = 3$.
- Da er $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ mens $g(3) = 2 + 3 = 5$.
- Slik kan vi fortsette å regne ut resultatene parvis, men vi kommer ingen vei hvis vi bare prøver å regne ut verdiene til f eller bare verdiene til g, vi må regne ut begge funksjonene *simultant*, det vil si *samtidig*.
- Begrunnelsen for at simultan rekursjon er en lovlig definisjonsform er den samme som for vanlig rekursjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

$$t(a, b) = (a \cdot b, a + b)$$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

$$t(a, b) = (a \cdot b, a + b)$$

ser vi at vi kan erstatte definisjonen av f og g med følgende rekursive definisjon av h:

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

$$t(a, b) = (a \cdot b, a + b)$$

  ser vi at vi kan erstatte definisjonen av f og g med følgende rekursive definisjon av h:
  - $h(1) = (1, 2)$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

$$t(a, b) = (a \cdot b, a + b)$$

  ser vi at vi kan erstatte definisjonen av f og g med følgende rekursive definisjon av h:
    - $h(1) = (1, 2)$
    - $h(n + 1) = t(h(n))$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvis vi lar $h(n) = (f(n), g(n))$, det vil si, det ordnede paret av $f(n)$ og $g(n)$, er h en funksjon definert på $\mathbb{N}$ og med verdiområde $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Lar vi $t : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ være definert ved

$$t(a, b) = (a \cdot b, a + b)$$

  ser vi at vi kan erstatte definisjonen av f og g med følgende rekursive definisjon av h:
  - $h(1) = (1, 2)$
  - $h(n + 1) = t(h(n))$
- Det er ikke noe spesielt med dette eksemplet, vi kunne gjort en tilsvarende omskrivning hver gang vi definerer funksjoner ved simultan rekursjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Det er ofte mye lettere å studere egenskapene til en utsagnslogisk formel, eksempelvis å undersøke om den er en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet, om negasjonstegnet bare står i posisjon rett foran en utsagnsvariabel.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Det er ofte mye lettere å studere egenskapene til en utsagnslogisk formel, eksempelvis å undersøke om den er en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet, om negasjonstegnet bare står i posisjon rett foran en utsagnsvariabel.

En slik formel sies å være på svak normalform.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Det er ofte mye lettere å studere egenskapene til en utsagnslogisk formel, eksempelvis å undersøke om den er en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet, om negasjonstegnet bare står i posisjon rett foran en utsagnsvariabel.

En slik formel sies å være på svak normalform.

Intuitivt kan vi finne en svak normalform ved å bruke deMorgans lover til å skyve negasjonstegnet innover.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Det er ofte mye lettere å studere egenskapene til en utsagnslogisk formel, eksempelvis å undersøke om den er en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet, om negasjonstegnet bare står i posisjon rett foran en utsagnsvariabel.

En slik formel sies å være på svak normalform.

Intuitivt kan vi finne en svak normalform ved å bruke deMorgans lover til å skyve negasjonstegnet innover.

Skal vi formulere dette presist, må vi bruke formatet til rekursive definisjoner.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Det er ofte mye lettere å studere egenskapene til en utsagnslogisk formel, eksempelvis å undersøke om den er en tautologi, en kontradiksjon eller noe annet, om negasjonstegnet bare står i posisjon rett foran en utsagnsvariabel.

En slik formel sies å være på svak normalform.

Intuitivt kan vi finne en svak normalform ved å bruke deMorgans lover til å skyve negasjonstegnet innover.

Skal vi formulere dette presist, må vi bruke formatet til rekursive definisjoner.

Vi må definere den svake normalformen $SF(A)$ til A og den svake normalformen $SF_{\neg}(A)$ til $\neg A$ simultant.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_{\neg}(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_{\neg}(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_{\neg}(A)$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_{\neg}(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_{\neg}(A)$
- $SF_{\neg}(\neg A) = SF(A)$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_\neg(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_\neg(A)$
- $SF_\neg(\neg A) = SF(A)$
- $SF(A \lor B) = SF(A) \lor SF(B)$, $SF(A \land B) = SF(A) \land SF(B)$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_\neg(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_\neg(A)$
- $SF_\neg(\neg A) = SF(A)$
- $SF(A \vee B) = SF(A) \vee SF(B)$, $SF(A \wedge B) = SF(A) \wedge SF(B)$.
- $SF_\neg(A \vee B) = SF_\neg(A) \wedge SF_\neg(B)$, $SF_\neg(A \wedge B) = SF_\neg(A) \vee SF_\neg(B)$

Generelell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_\neg(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_\neg(A)$
- $SF_\neg(\neg A) = SF(A)$
- $SF(A \vee B) = SF(A) \vee SF(B)$, $SF(A \wedge B) = SF(A) \wedge SF(B)$.
- $SF_\neg(A \vee B) = SF_\neg(A) \wedge SF_\neg(B)$, $SF_\neg(A \wedge B) = SF_\neg(A) \vee SF_\neg(B)$

- Heller ikke dette eksemplet er valgt bare for å gjøre MAT1030 vanskelig.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La $SF(A) = A$ og $SF_\neg(A) = \neg A$ hvis A er en utsagnsvariabel p, q eller r.
- $SF(\neg A) = SF_\neg(A)$
- $SF_\neg(\neg A) = SF(A)$
- $SF(A \vee B) = SF(A) \vee SF(B)$, $SF(A \wedge B) = SF(A) \wedge SF(B)$.
- $SF_\neg(A \vee B) = SF_\neg(A) \wedge SF_\neg(B)$, $SF_\neg(A \wedge B) = SF_\neg(A) \vee SF_\neg(B)$

- Heller ikke dette eksemplet er valgt bare for å gjøre MAT1030 vanskelig.
- Når man skal skrive programmer for å undersøke om en utsagnslogisk formel er oppfyllbar eller en kontradiksjon, er det til stor hjelp om man kan anta at formelen er på svak normalform.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \land q) \lor \neg(p \land \neg r)$:

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$:

$SF((\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)) =$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$:

$SF((\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)) =$

$SF(\neg p \wedge q) \vee SF(\neg(p \wedge \neg r)) =$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \land q) \lor \neg(p \land \neg r)$:

$SF((\neg p \land q) \lor \neg(p \land \neg r)) =$

$SF(\neg p \land q) \lor SF(\neg(p \land \neg r)) =$

$(SF(\neg p) \land SF(q)) \lor SF_{\neg}(p \land \neg r) =$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \land q) \lor \neg(p \land \neg r)$:

$SF((\neg p \land q) \lor \neg(p \land \neg r)) =$

$SF(\neg p \land q) \lor SF(\neg(p \land \neg r)) =$

$(SF(\neg p) \land SF(q)) \lor SF_\neg(p \land \neg r) =$

$(SF_\neg(p) \land q) \lor (SF_\neg(p) \lor SF_\neg(\neg r)) =$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$:

$SF((\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)) =$

$SF(\neg p \wedge q) \vee SF(\neg(p \wedge \neg r)) =$

$(SF(\neg p) \wedge SF(q)) \vee SF_{\neg}(p \wedge \neg r) =$

$(SF_{\neg}(p) \wedge q) \vee (SF_{\neg}(p) \vee SF_{\neg}(\neg r)) =$

$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee SF(r)) =$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Som et eksempel skal vi se på hvordan vi finner den svake normalformen til $(\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)$:

$SF((\neg p \wedge q) \vee \neg(p \wedge \neg r)) =$

$SF(\neg p \wedge q) \vee SF(\neg(p \wedge \neg r)) =$

$(SF(\neg p) \wedge SF(q)) \vee SF_{\neg}(p \wedge \neg r) =$

$(SF_{\neg}(p) \wedge q) \vee (SF_{\neg}(p) \vee SF_{\neg}(\neg r)) =$

$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee SF(r)) =$

$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee r)$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Riktig bruk av parenteser er viktig for at programmer skal være syntaktisk korrekte, eller for at matematiske uttrykk skal gi mening.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Riktig bruk av parenteser er viktig for at programmer skal være syntaktisk korrekte, eller for at matematiske uttrykk skal gi mening.
- I dette eksemplet skal vi se på mengden av korrekte parentesuttrykk, hvor vi bare bruker “(”og “)” .

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Riktig bruk av parenteser er viktig for at programmer skal være syntaktisk korrekte, eller for at matematiske uttrykk skal gi mening.
- I dette eksemplet skal vi se på mengden av korrekte parentesuttrykk, hvor vi bare bruker "("og ")" .
- Vi skal se på hvordan vi kan bygge opp mengden av korrekte parentesuttrykk ved induksjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Riktig bruk av parenteser er viktig for at programmer skal være syntaktisk korrekte, eller for at matematiske uttrykk skal gi mening.
- I dette eksemplet skal vi se på mengden av korrekte parentesuttrykk, hvor vi bare bruker "("og ")" .
- Vi skal se på hvordan vi kan bygge opp mengden av korrekte parentesuttrykk ved induksjon.
- Deretter skal vi vise at den samme mengden kan beskrives på en annen måte, en måte vi kan bruke for maskinell kontroll av om parenteser er satt riktig eller ikke.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Riktig bruk av parenteser er viktig for at programmer skal være syntaktisk korrekte, eller for at matematiske uttrykk skal gi mening.
- I dette eksemplet skal vi se på mengden av korrekte parentesuttrykk, hvor vi bare bruker "(" og ")" .
- Vi skal se på hvordan vi kan bygge opp mengden av korrekte parentesuttrykk ved induksjon.
- Deretter skal vi vise at den samme mengden kan beskrives på en annen måte, en måte vi kan bruke for maskinell kontroll av om parenteser er satt riktig eller ikke.
- Vi trenger induksjonsbevis både over oppbyggingen av korrekte parentesuttrykk og over de ikke-negative hele tallene for å vise dette.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

  De korrekte parentesuttrykkene er den minste mengden av ord som oppfyller

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

  De korrekte parentesuttrykkene er den minste mengden av ord som oppfyller

1. Det tomme ordet e er et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

  De korrekte parentesuttrykkene er den minste mengden av ord som oppfyller

1. Det tomme ordet e er et korrekt parentesuttrykk.
2. Hvis v er et korrekt parentesuttrykk, er $w = (v)$ et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

  De korrekte parentesuttrykkene er den minste mengden av ord som oppfyller

1. Det tomme ordet e er et korrekt parentesuttrykk.
2. Hvis v er et korrekt parentesuttrykk, er $w = (v)$ et korrekt parentesuttrykk.
3. Hvis u og v er korrekte parentesuttrykk, er *sammensetningen* $w = uv$ et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Til sist skal vi vise hvordan den alternative skrivemåten kan brukes til å finne en pseudokode som avgjør om et uttrykk med parenteser er korrekt eller ikke.

  De korrekte parentesuttrykkene er den minste mengden av ord som oppfyller

1. Det tomme ordet e er et korrekt parentesuttrykk.
2. Hvis v er et korrekt parentesuttrykk, er $w = (v)$ et korrekt parentesuttrykk.
3. Hvis u og v er korrekte parentesuttrykk, er *sammensetningen* $w = uv$ et korrekt parentesuttrykk.

Vi skal studere dette viktige formelle språket litt nærmere.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Bevis

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Bevis

Vi bruker induksjon på oppbyggingen av et parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Bevis

Vi bruker induksjon på oppbyggingen av et parentesuttrykk.

I dette tilfellet er påstanden egentlig opplagt, men vi beviser den ved induksjon likevel, som et eksempel.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Bevis

Vi bruker induksjon på oppbyggingen av et parentesuttrykk.

I dette tilfellet er påstanden egentlig opplagt, men vi beviser den ved induksjon likevel, som et eksempel.

Hvis $w = e$ er antall høyre og venstreparenteser begge lik 0, og derfor like.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 1

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, vil antall høyre og venstreparenteser i w være det samme.

Bevis

Vi bruker induksjon på oppbyggingen av et parentesuttrykk.

I dette tilfellet er påstanden egentlig opplagt, men vi beviser den ved induksjon likevel, som et eksempel.

Hvis $w = e$ er antall høyre og venstreparenteser begge lik 0, og derfor like.

La $w = (v)$ og anta at påstanden holder for v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Derfor er de like for w også.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Derfor er de like for w også.

La så $w = uv$ og anta at påstanden holder for både u og for v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Derfor er de like for w også.

La så $w = uv$ og anta at påstanden holder for både u og for v.

Antall venstreparenteser i w er summen av antall venstreparenteser i u og antall venstreparenteser i v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Derfor er de like for w også.

La så $w = uv$ og anta at påstanden holder for både u og for v.

Antall venstreparenteser i w er summen av antall venstreparenteser i u og antall venstreparenteser i v.

Ved induksjonsantagelsen er dette det samme som antall høyreparenteser i u og i v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Da er både antall venstre- og høyreparenteser i w en større enn tilsvarende tall for v, som er like.

Derfor er de like for w også.

La så $w = uv$ og anta at påstanden holder for både u og for v.

Antall venstreparenteser i w er summen av antall venstreparenteser i u og antall venstreparenteser i v.

Ved induksjonsantagelsen er dette det samme som antall høyreparenteser i u og i v.

Da må summen også være den samme.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \land v \in X \Rightarrow uv \in X$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \wedge v \in X \Rightarrow uv \in X$
- Vi har bevist at mengden Y av ord som har like mange venstre- og høyreparenteser, og ingen andre symboler, oppfyller

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \wedge v \in X \Rightarrow uv \in X$
- Vi har bevist at mengden Y av ord som har like mange venstre- og høyreparenteser, og ingen andre symboler, oppfyller
  - $e \in Y$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \wedge v \in X \Rightarrow uv \in X$
- Vi har bevist at mengden Y av ord som har like mange venstre- og høyreparenteser, og ingen andre symboler, oppfyller
  - $e \in Y$
  - $v \in Y \Rightarrow (v) \in Y$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \wedge v \in X \Rightarrow uv \in X$
- Vi har bevist at mengden Y av ord som har like mange venstre- og høyreparenteser, og ingen andre symboler, oppfyller
  - $e \in Y$
  - $v \in Y \Rightarrow (v) \in Y$
  - $u \in Y \wedge v \in Y \Rightarrow uv \in Y$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Vi definerte mengden av de korrekte parentesuttrykkene som den minste mengden X slik at
  - $e \in X$
  - $v \in X \Rightarrow (v) \in X$
  - $u \in X \wedge v \in X \Rightarrow uv \in X$
- Vi har bevist at mengden Y av ord som har like mange venstre- og høyreparenteser, og ingen andre symboler, oppfyller
  - $e \in Y$
  - $v \in Y \Rightarrow (v) \in Y$
  - $u \in Y \wedge v \in Y \Rightarrow uv \in Y$
- Det betyr at $X \subseteq Y$, og det er en reformulering av Påstand 1.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Bevis

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Bevis

Igjen bruker vi induksjon på oppbyggingen av w som et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Bevis

Igjen bruker vi induksjon på oppbyggingen av w som et korrekt parentesuttrykk.

Hvis $w = e$ er dette opplagt riktig.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Bevis

Igjen bruker vi induksjon på oppbyggingen av w som et korrekt parentesuttrykk.

Hvis $w = e$ er dette opplagt riktig.

Anta at påstanden holder for v, og la $w = (v)$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 2

Hvis w er et korrekt parentesuttrykk, og vi leser w fra venstre mot høyre, finner vi ikke noe sted hvor det har vært flere høyre- enn venstreparenteser.

Bevis

Igjen bruker vi induksjon på oppbyggingen av w som et korrekt parentesuttrykk.

Hvis $w = e$ er dette opplagt riktig.

Anta at påstanden holder for v, og la $w = (v)$.

Når vi leser w fra venstre mot høyre har vi alltid en høyreparentes mer når vi leser w enn når vi er på tilsvarende sted i v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi har et positivt overskudd av (hele tiden mens vi leser v-delen av $($v$, og vi får ikke noe overskudd av) til slutt heller.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi har et positivt overskudd av (hele tiden mens vi leser v-delen av $(v$, og vi får ikke noe overskudd av) til slutt heller.

Anta at påstanden holder for u og for v, og at $w = uv$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi har et positivt overskudd av (hele tiden mens vi leser v-delen av $(v$, og vi får ikke noe overskudd av) til slutt heller.

Anta at påstanden holder for u og for v, og at $w = uv$.

Når vi leser w fra venstre mot høyre kan vi først ikke opparbeide noe overskudd av) mens vi leser u-delen, og deretter heller ikke mens vi leser v-delen.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Det betyr at vi har et positivt overskudd av (hele tiden mens vi leser v-delen av (v, og vi får ikke noe overskudd av) til slutt heller.

Anta at påstanden holder for u og for v, og at $w = uv$.

Når vi leser w fra venstre mot høyre kan vi først ikke opparbeide noe overskudd av) mens vi leser u-delen, og deretter heller ikke mens vi leser v-delen.

Dermed holder påstanden for w også.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Bevis

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Bevis

Her lønner det seg å bruke induksjon på lengden av ordet w.

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Bevis

Her lønner det seg å bruke induksjon på lengden av ordet w.

I motsetning til vanlig induksjon, starter beviset her med lengde 0, som er lengden til det tomme ordet.

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Bevis

Her lønner det seg å bruke induksjon på lengden av ordet w.

I motsetning til vanlig induksjon, starter beviset her med lengde 0, som er lengden til det tomme ordet.

Hvis lengden av w er 0, det vil si hvis $w = e$, er w et korrekt parentesuttrykk pr. definisjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Påstand 3

La w være et ord hvor vi bare har brukt symbolene "(" og ")".

Hvis w oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og Påstand 2, vil w være et korrekt parentesuttrykk.

Bevis

Her lønner det seg å bruke induksjon på lengden av ordet w.

I motsetning til vanlig induksjon, starter beviset her med lengde 0, som er lengden til det tomme ordet.

Hvis lengden av w er 0, det vil si hvis $w = e$, er w et korrekt parentesuttrykk pr. definisjon.

La $w \neq e$ og anta at påstanden holder for alle kortere ord v (Kommentar kommer senere).

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Vi må dele beviset opp i to tilfeller:

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Vi må dele beviset opp i to tilfeller:

Tilfelle 1: Når vi leser w fra venstre mot høyre finner vi ikke noe sted før til slutt at w har like mange høyre- som venstreparenteser.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Vi må dele beviset opp i to tilfeller:

Tilfelle 1: Når vi leser w fra venstre mot høyre finner vi ikke noe sted før til slutt at w har like mange høyre- som venstreparenteser.

Siden w oppfyller påstandene, må w være på formen (v), og siden vi er i tilfelle 1 vil også v oppfylle Påstand 1 og Påstand 2.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Vi må dele beviset opp i to tilfeller:

Tilfelle 1: Når vi leser w fra venstre mot høyre finner vi ikke noe sted før til slutt at w har like mange høyre- som venstreparenteser.

Siden w oppfyller påstandene, må w være på formen (v), og siden vi er i tilfelle 1 vil også v oppfylle Påstand 1 og Påstand 2.

Ved induksjonsantagelsen er v korrekt, og da er $w = (v)$ korrekt.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Tilfelle 2: Vi kan dele w opp i to ekte delord, $w = uv$, slik at u har like mange venstre- som høyreparenteser.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Tilfelle 2: Vi kan dele w opp i to ekte delord, $w = uv$, slik at u har like mange venstre- som høyreparenteser.

Da må det samme gjelde for v, siden det gjelder for w.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Tilfelle 2: Vi kan dele w opp i to ekte delord, $w = uv$, slik at u har like mange venstre- som høyreparenteser.

Da må det samme gjelde for v, siden det gjelder for w.

Videre får vi ikke noe overskudd av høyreparenteser mens vi leser u, siden det er det samme som å lese w. Siden vi ikke starter med noe overskudd av venstreparenteser etter å ha lest u, vil situasjonen være lik om vi leser v direkte eller etter å ha lest u.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Tilfelle 2: Vi kan dele w opp i to ekte delord, $w = uv$, slik at u har like mange venstre- som høyreparenteser.

Da må det samme gjelde for v, siden det gjelder for w.

Videre får vi ikke noe overskudd av høyreparenteser mens vi leser u, siden det er det samme som å lese w. Siden vi ikke starter med noe overskudd av venstreparenteser etter å ha lest u, vil situasjonen være lik om vi leser v direkte eller etter å ha lest u.

Det betyr at Påstand 1 og Påstand 2 holder både u og v.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Ved induksjonsantagelsen er da u og v korrekte.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Ved induksjonsantagelsen er da u og v korrekte.

Da er $w = uv$ også korrekt.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Ved induksjonsantagelsen er da u og v korrekte.

Da er $w = uv$ også korrekt.

Siden dette argumentet dekker alle mulighetene, er Påstand 3 vist ved induksjon over $\mathbb{N}_0$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.
- For å vise Påstand 1 brukte vi induksjon over oppbyggingen av et uttrkk som et korrekt parentesuttrykk.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.
- For å vise Påstand 1 brukte vi induksjon over oppbyggingen av et uttrkk som et korrekt parentesuttrykk.
- Vi brukte induksjon over den samme induktivt definerte mengden for å bevise Påstand 2.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.
- For å vise Påstand 1 brukte vi induksjon over oppbyggingen av et uttrkk som et korrekt parentesuttrykk.
- Vi brukte induksjon over den samme induktivt definerte mengden for å bevise Påstand 2.
- For å bevise Påstand 3 brukte vi imidlertid induksjon over $\mathbb{N}_0$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.
- For å vise Påstand 1 brukte vi induksjon over oppbyggingen av et uttrkk som et korrekt parentesuttrykk.
- Vi brukte induksjon over den samme induktivt definerte mengden for å bevise Påstand 2.
- For å bevise Påstand 3 brukte vi imidlertid induksjon over $\mathbb{N}_0$.
- Det er mulig å skrive om bevisene for Påstand 1 og for Påstand 2 slik at de blir beviser ved induksjon over $\mathbb{N}_0$, eksempelvis bruke induksjon på antall parenteser i uttrykket.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- La oss oppsummere dette eksemplet.
- For å vise Påstand 1 brukte vi induksjon over oppbyggingen av et uttrkk som et korrekt parentesuttrykk.
- Vi brukte induksjon over den samme induktivt definerte mengden for å bevise Påstand 2.
- For å bevise Påstand 3 brukte vi imidlertid induksjon over $\mathbb{N}_0$.
- Det er mulig å skrive om bevisene for Påstand 1 og for Påstand 2 slik at de blir beviser ved induksjon over $\mathbb{N}_0$, eksempelvis bruke induksjon på antall parenteser i uttrykket.
- Dette er en omskrivning som i innlæringsfasen kan gjøre det lettere å forstå generell induksjon, men som på sikt gjør det mer tungvindt å formulere bevisene.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

  Anta at vi kan vise for alle n at

$$\forall m < n P(m) \rightarrow P(n)$$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

  Anta at vi kan vise for alle n at

$$\forall m < nP(m) \rightarrow P(n)$$

- Da kan det ikke finnes noe minste tall n slik at $P(n)$ er usann.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

  Anta at vi kan vise for alle n at

$$\forall m < n P(m) \to P(n)$$

- Da kan det ikke finnes noe minste tall n slik at $P(n)$ er usann.
- Dermed vet vi at $P(n)$ er sann for alle n.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

  Anta at vi kan vise for alle n at

$$\forall m < nP(m) \to P(n)$$

- Da kan det ikke finnes noe minste tall n slik at $P(n)$ er usann.
- Dermed vet vi at $P(n)$ er sann for alle n.
- Det er fullt ut akseptabelt å bruke denne alternative formen i bevis.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Noen vil stusse over at vi ikke brukte den vanlige formuleringen med å vise $P(1)$ og at $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ for alle n.
- Det vi brukte her var et annet induksjonsprinsipp:

  Anta at vi kan vise for alle n at

$$\forall m < n P(m) \rightarrow P(n)$$

- Da kan det ikke finnes noe minste tall n slik at $P(n)$ er usann.
- Dermed vet vi at $P(n)$ er sann for alle n.
- Det er fullt ut akseptabelt å bruke denne alternative formen i bevis.
- Vi skal komme tilbake med et eksempel til på denne formen for induksjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?
- Vi skriver en kode for funksjonen som teller overskudd av "(" i forhold til ")".

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?
- Vi skriver en kode for funksjonen som teller overskudd av “(” i forhold til “)”.
- Underveis kontrolleres det at vi ikke får for mange “)”.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?
- Vi skriver en kode for funksjonen som teller overskudd av "(" i forhold til ")".
- Underveis kontrolleres det at vi ikke får for mange ")".
- Til sist kontrolleres det at vi hadde like mange av hver.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?
- Vi skriver en kode for funksjonen som teller overskudd av "(" i forhold til ")".
- Underveis kontrolleres det at vi ikke får for mange ")".
- Til sist kontrolleres det at vi hadde like mange av hver.
- n hentes fra $\mathbb{N}_0$, alle v_i'ene er parenteser, x varierer over $\mathbb{J}$ og y tar JA/NEI som mulige verdier.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Hvordan kan vi så finne en pseudokode som avgjør om et parentesuttrykk er korrekt eller ikke?
- Vi skriver en kode for funksjonen som teller overskudd av "(" i forhold til ")".
- Underveis kontrolleres det at vi ikke får for mange ")".
- Til sist kontrolleres det at vi hadde like mange av hver.
- n hentes fra $\mathbb{N}_0$, alle v_i'ene er parenteser, x varierer over $\mathbb{J}$ og y tar JA/NEI som mulige verdier.
- Pseudokoden kommer på neste side.

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

Generell induksjon og rekursjon

```
Input n
Input w = v_1 ··· v_n
x ← 0
```

Generell induksjon og rekursjon

Input n

Input $w = v_1 \cdots v_n$

$x \leftarrow 0$

$y \leftarrow JA$

Generell induksjon og rekursjon

Input n

Input $w = v_1 \cdots v_n$

$x \leftarrow 0$

$y \leftarrow JA$

For $i = 1$ **to** n **do**

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

 5.1 **If** $v_i = ($ **then**

  5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

  else

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

   else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

   else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

  5.2 **If** $x < 0$ **then**

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

    else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

  5.2 **If** $x < 0$ **then**

    5.2.1 $y \leftarrow NEI$

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

    else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

  5.2 **If** $x < 0$ **then**

    5.2.1 $y \leftarrow NEI$

6 **If** $x > 0$ **then**

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

   else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

  5.2 **If** $x < 0$ **then**

    5.2.1 $y \leftarrow NEI$

6 **If** $x > 0$ **then**

  6.1 $y \leftarrow NEI$

Generell induksjon og rekursjon

1 *Input* n

2 *Input* $w = v_1 \cdots v_n$

3 $x \leftarrow 0$

4 $y \leftarrow JA$

5 **For** $i = 1$ **to** n **do**

  5.1 **If** $v_i = ($ **then**

    5.1.1 $x \leftarrow x + 1$

    else

    5.1.2 $x \leftarrow x - 1$

  5.2 **If** $x < 0$ **then**

    5.2.1 $y \leftarrow NEI$

6 **If** $x > 0$ **then**

  6.1 $y \leftarrow NEI$

7 *Output* y

Generell induksjon og rekursjon

Merk

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.
- Skal vi lage en algoritme som virker i en slik situasjon, kan vi ikke la x ta verdier i mengden av hele tall, men i mengden av lister av venstreparenteser.

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.
- Skal vi lage en algoritme som virker i en slik situasjon, kan vi ikke la x ta verdier i mengden av hele tall, men i mengden av lister av venstreparenteser.
- Hver gang vi treffer på en venstreparentes av et slag, legger vi den til listen.

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.
- Skal vi lage en algoritme som virker i en slik situasjon, kan vi ikke la x ta verdier i mengden av hele tall, men i mengden av lister av venstreparenteser.
- Hver gang vi treffer på en venstreparentes av et slag, legger vi den til listen.
- Hver gang vi treffer på en høyreparentes, må vi sammenlikne den med venstreparentesen ytterst i listen (hodet).

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.
- Skal vi lage en algoritme som virker i en slik situasjon, kan vi ikke la x ta verdier i mengden av hele tall, men i mengden av lister av venstreparenteser.
- Hver gang vi treffer på en venstreparentes av et slag, legger vi den til listen.
- Hver gang vi treffer på en høyreparentes, må vi sammenlikne den med venstreparentesen ytterst i listen (hodet).
- Vi trenger et språk for håndtering av lister for å kunne skrive pseudokoder basert på denne skissen.

Generell induksjon og rekursjon

Merk

- I virkelighetens verden har vi flere typer parenteser å holde styr på.
- Skal vi lage en algoritme som virker i en slik situasjon, kan vi ikke la x ta verdier i mengden av hele tall, men i mengden av lister av venstreparenteser.
- Hver gang vi treffer på en venstreparentes av et slag, legger vi den til listen.
- Hver gang vi treffer på en høyreparentes, må vi sammenlikne den med venstreparentesen ytterst i listen (hodet).
- Vi trenger et språk for håndtering av lister for å kunne skrive pseudokoder basert på denne skissen.
- For de som senere lærer om "push-down"-automater, vil det å lage en automat som realiserer denne algoritmen være en enkel oppgave.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La oss gå tilbake til den formen for induksjon som vi brukte for å vise at alle parentesuttrykk som oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og 2 vil være korrekte.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La oss gå tilbake til den formen for induksjon som vi brukte for å vise at alle parentesuttrykk som oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og 2 vil være korrekte.
- Da vi diskuterte kontrapositive argumenter, ga vi et eksempel på hvordan man kan vise at alle tall $n \geq 2$ kan faktoriseres i primtall (hvor det å konstatere at et tall er et primtall betraktes som en faktorisering).

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La oss gå tilbake til den formen for induksjon som vi brukte for å vise at alle parentesuttrykk som oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og 2 vil være korrekte.
- Da vi diskuterte kontrapositive argumenter, ga vi et eksempel på hvordan man kan vise at alle tall $n \geq 2$ kan faktoriseres i primtall (hvor det å konstatere at et tall er et primtall betraktes som en faktorisering).
- Det er lettere å formulere beviset hvis man kan bruke induksjon.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La oss gå tilbake til den formen for induksjon som vi brukte for å vise at alle parentesuttrykk som oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og 2 vil være korrekte.
- Da vi diskuterte kontrapositive argumenter, ga vi et eksempel på hvordan man kan vise at alle tall $n \geq 2$ kan faktoriseres i primtall (hvor det å konstatere at et tall er et primtall betraktes som en faktorisering).
- Det er lettere å formulere beviset hvis man kan bruke induksjon.
- La $n \geq 2$, og anta at påstanden holder for alle m slik at $2 \leq m < n$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- La oss gå tilbake til den formen for induksjon som vi brukte for å vise at alle parentesuttrykk som oppfyller konklusjonene i Påstand 1 og 2 vil være korrekte.
- Da vi diskuterte kontrapositive argumenter, ga vi et eksempel på hvordan man kan vise at alle tall $n \geq 2$ kan faktoriseres i primtall (hvor det å konstatere at et tall er et primtall betraktes som en faktorisering).
- Det er lettere å formulere beviset hvis man kan bruke induksjon.
- La $n \geq 2$, og anta at påstanden holder for alle m slik at $2 \leq m < n$.
- Hvis n ikke er et primtall, finnes tall $m < n$ og $k < n$ slik at $n = mk$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved antagelsen kan både m og k faktoriseres i primtall.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved antagelsen kan både m og k faktoriseres i primtall.
- Ved å bruke alle disse primtallsfaktorene sammen, får vi en primtallsfaktorisering av n

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved antagelsen kan både m og k faktoriseres i primtall.
- Ved å bruke alle disse primtallsfaktorene sammen, får vi en primtallsfaktorisering av n

Merk

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved antagelsen kan både m og k faktoriseres i primtall.
- Ved å bruke alle disse primtallsfaktorene sammen, får vi en primtallsfaktorisering av n

Merk

Dette argumentet gir oss ikke lov til å konkludere at det finnes nøyaktig en måte å faktorisere et tall på, bare at det finnes minst en.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.
- Ved argumentet vårt må det da finnes $n_2 < n_1$ slik at heller ikke $P(n_2)$ holder.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.
- Ved argumentet vårt må det da finnes $n_2 < n_1$ slik at heller ikke $P(n_2)$ holder.
- Vi kan fortsette med å finne $n_3 < n_2$, $n_4 < n_3$ osv. slik at $P(n_i)$ ikke holder for noen $i \in \mathbb{N}$.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.
- Ved argumentet vårt må det da finnes $n_2 < n_1$ slik at heller ikke $P(n_2)$ holder.
- Vi kan fortsette med å finne $n_3 < n_2$, $n_4 < n_3$ osv. slik at $P(n_i)$ ikke holder for noen $i \in \mathbb{N}$.

! Det finnes imidlertid ingen strengt synkende følge av naturlige tall, så dette er umulig.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.
- Ved argumentet vårt må det da finnes $n_2 < n_1$ slik at heller ikke $P(n_2)$ holder.
- Vi kan fortsette med å finne $n_3 < n_2$, $n_4 < n_3$ osv. slik at $P(n_i)$ ikke holder for noen $i \in \mathbb{N}$.

! Det finnes imidlertid ingen strengt synkende følge av naturlige tall, så dette er umulig.

- Vi kan i prinsippet bruke induksjon som bevisform for enhver ordning som ikke tillater noen uendelig strengt synkende følge.

Generell induksjon og rekursjon

- I eksemplet over viste vi en egenskap $P(n)$ ut fra antagelsen om at $P(m)$ og $P(k)$ holder for to utvalgte tall $m < n$ og $k < n$.
- Vi konkluderte med at $P(n)$ må holde for alle n.
- Vi kan gi en generell kontrapositiv begrunnelse for at det må være slik.
- Anta at det finnes et tall n_1 slik at $P(n_1)$ ikke holder.
- Ved argumentet vårt må det da finnes $n_2 < n_1$ slik at heller ikke $P(n_2)$ holder.
- Vi kan fortsette med å finne $n_3 < n_2$, $n_4 < n_3$ osv. slik at $P(n_i)$ ikke holder for noen $i \in \mathbb{N}$.

! Det finnes imidlertid ingen strengt synkende følge av naturlige tall, så dette er umulig.

- Vi kan i prinsippet bruke induksjon som bevisform for enhver ordning som ikke tillater noen uendelig strengt synkende følge.
- Vi skal ikke presse denne sitronen lenger, det er sikkert surt nok for mange.

Generell induksjon og rekursjon

- Eksemplene med rekursjon på oppbyggingen av ord eller formler er så sentrale at de kan bli brukt som grunnlag for oppgaver gitt til eksamen eller til Oblig. 2.

Generell induksjon og rekursjon

- Eksemplene med rekursjon på oppbyggingen av ord eller formler er så sentrale at de kan bli brukt som grunnlag for oppgaver gitt til eksamen eller til Oblig. 2.
- Det neste eksemplet har ikke den samme betydningen i informatikk, og kan derfor best sees på som et eksempel for innøvelse av forståelse og ferdigheter.

Generell induksjon og rekursjon

- Eksemplene med rekursjon på oppbyggingen av ord eller formler er så sentrale at de kan bli brukt som grunnlag for oppgaver gitt til eksamen eller til Oblig. 2.
- Det neste eksemplet har ikke den samme betydningen i informatikk, og kan derfor best sees på som et eksempel for innøvelse av forståelse og ferdigheter.
- I Oblig. 1 så vi på hvordan vi kunne beskrive ordnede par innenfor rammen av mengdelære.

Generell induksjon og rekursjon

- Eksemplene med rekursjon på oppbyggingen av ord eller formler er så sentrale at de kan bli brukt som grunnlag for oppgaver gitt til eksamen eller til Oblig. 2.
- Det neste eksemplet har ikke den samme betydningen i informatikk, og kan derfor best sees på som et eksempel for innøvelse av forståelse og ferdigheter.
- I Oblig. 1 så vi på hvordan vi kunne beskrive ordnede par innenfor rammen av mengdelære.
- I realiteten kan alle data det måtte være aktuelt å gi en digital representasjon for kunne beskrives innenfor rammen av mengdelæren.

Generell induksjon og rekursjon

- Eksemplene med rekursjon på oppbyggingen av ord eller formler er så sentrale at de kan bli brukt som grunnlag for oppgaver gitt til eksamen eller til Oblig. 2.
- Det neste eksemplet har ikke den samme betydningen i informatikk, og kan derfor best sees på som et eksempel for innøvelse av forståelse og ferdigheter.
- I Oblig. 1 så vi på hvordan vi kunne beskrive ordnede par innenfor rammen av mengdelære.
- I realiteten kan alle data det måtte være aktuelt å gi en digital representasjon for kunne beskrives innenfor rammen av mengdelæren.
- I eksemplet beskriver vi "den universelle datatype", en universell mengde hvor vi kan finne alle *virkelige* datatyper som delmengder.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \to \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \to \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved
  - $f(\emptyset) = 0$

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \to \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved
  - $f(\emptyset) = 0$
  - $f(\{a_1, \ldots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \cdots + 2^{f(a_n)}$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel

- Vi definerer de hereditært endelige mengdene HF som den minste mengden slik at
  - $\emptyset \in HF$
  - Hvis $X = \{a_1, \dots, a_n\}$ er en endelig delmengde av HF, så er $X \in HF$.
- Vi definerer $f : HF \to \mathbb{N}_0$ ved rekursjon over HF ved
  - $f(\emptyset) = 0$
  - $f(\{a_1, \dots, a_n\}) = 2^{f(a_1)} + \cdots + 2^{f(a_n)}$.

Her må vi anta at mengden er beskrevet uten gjentagelse, det vil si at alle a_i'ene er forskjellige.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.
- Hvis $k \in \mathbb{N}_0$ vil det finnes en og bare en $X \in HF$ slik at $f(X) = k$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.
- Hvis $k \in \mathbb{N}_0$ vil det finnes en og bare en $X \in HF$ slik at $f(X) = k$.
- Her bruker vi induksjon på k.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.
- Hvis $k \in \mathbb{N}_0$ vil det finnes en og bare en $X \in HF$ slik at $f(X) = k$.
- Her bruker vi induksjon på k.

  For $n = 0$ ser vi at det bare er $X = \emptyset$ som kan gi $f(X) = 0$ siden $2^{f(a_i)} > 0$ for alle mulige $a_i \in X$.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.
- Hvis $k \in \mathbb{N}_0$ vil det finnes en og bare en $X \in HF$ slik at $f(X) = k$.
- Her bruker vi induksjon på k.

  For $n = 0$ ser vi at det bare er $X = \emptyset$ som kan gi $f(X) = 0$ siden $2^{f(a_i)} > 0$ for alle mulige $a_i \in X$.

  For $k > 0$, finnes det en og bare en måte å skrive k som en sum av forskjellige 2'erpotenser på, og hver eksponent k_i vil komme fra en og bare en mengde a_i.

Generell induksjon og rekursjon

Eksempel (Fortsatt)

- Ved induksjon over HF ser vi at $f(X) \in \mathbb{N}_0$ for alle $X \in HF$.

  Hvis $X = \emptyset$ ser vi det direkte, og hvis $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan vi bruke induksjonsantagelsen som sier at $f(a_i) \in \mathbb{N}_0$ for alle i.
- Hvis $k \in \mathbb{N}_0$ vil det finnes en og bare en $X \in HF$ slik at $f(X) = k$.
- Her bruker vi induksjon på k.

  For $n = 0$ ser vi at det bare er $X = \emptyset$ som kan gi $f(X) = 0$ siden $2^{f(a_i)} > 0$ for alle mulige $a_i \in X$.

  For $k > 0$, finnes det en og bare en måte å skrive k som en sum av forskjellige 2'erpotenser på, og hver eksponent k_i vil komme fra en og bare en mengde a_i.

  Det betyr at vi kan finne X slik at $f(X) = k$ fra k.

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \rightarrow HF$ være definert ved

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \to HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \rightarrow HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \rightarrow HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \to HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.
Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \to HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.

Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

c) Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \to HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.

   Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

c) Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

d) La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$.

Generell induksjon og rekursjon

Oppgave

La HF og f være definert som i eksemplet over, og la $S : HF \to HF$ være definert ved

$$S(X) = X \cup \{X\}.$$

a) Vis at $X \in HF \Rightarrow S(X) \in HF$.

b) La $X, Y \in HF$.

   Vis at $X \in Y \Rightarrow f(X) < f(Y)$.

c) Forklar hvorfor det ikke finnes noen $X \in HF$ slik at $X \in X$

d) La $N \subseteq HF$ være den minste mengden slik at $\emptyset \in N$ og slik at hvis $X \in N$ så vil $S(X) \in N$.

   Drøft sammenhengen mellom N og $\mathbb{N}_0$.

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v

  $v ::= |p|q|r$

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$
- De to første linjene skal leses som følger:

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

- De to første linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi v betegne en vilkårlig utsagnsvariabel.

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

- De to første linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi v betegne en vilkårlig utsagnsvariabel.
  v kan stå for p, q eller r.

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

- De to første linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi v betegne en vilkårlig utsagnsvariabel.
  v kan stå for p, q eller r.

- De to neste linjene skal leses som følger:

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

- De to første linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi v betegne en vilkårlig utsagnsvariabel. v kan stå for p, q eller r.

- De to neste linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi A betegne en vilkårlig formel.

Generell induksjon og rekursjon

- Hvis vår induktive definisjon av mengden av utsagnslogiske formler skulle vært gitt i en lærebok i informatikk på et avansert nivå, eller i en forskningsartikkel, ville den sett ut som noe slikt:

  Utsagnsvariabel v
  $v ::= |p|q|r$
  Formel A
  $A ::= v|\neg A|(A \wedge A)|(A \vee A)$

- De to første linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi v betegne en vilkårlig utsagnsvariabel.
  v kan stå for p, q eller r.

- De to neste linjene skal leses som følger:

  I denne definisjonen lar vi A betegne en vilkårlig formel.
  En formel kan enten være en utsagnsvariabel, fremkommet fra en annen formel ved å skrive $\neg$ foran, eller fremkommet fra to andre formler ved å skrive $\wedge$ eller $\vee$ mellom, og parenteser rundt.

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.
- Som tidligere nevnt, liker informatikere og logikere å la de naturlige tallene starte med 0, altså å arbeide med $\mathbb{N}_0$ i stedet for $\mathbb{N}$.

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.
- Som tidligere nevnt, liker informatikere og logikere å la de naturlige tallene starte med 0, altså å arbeide med $\mathbb{N}_0$ i stedet for $\mathbb{N}$.
- Følgende definisjon er påtruffet i informatikklitteratur:

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.
- Som tidligere nevnt, liker informatikere og logikere å la de naturlige tallene starte med 0, altså å arbeide med $\mathbb{N}_0$ i stedet for $\mathbb{N}$.
- Følgende definisjon er påtruffet i informatikklitteratur:

  $n : NAT$

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.
- Som tidligere nevnt, liker informatikere og logikere å la de naturlige tallene starte med 0, altså å arbeide med $\mathbb{N}_0$ i stedet for $\mathbb{N}$.
- Følgende definisjon er påtruffet i informatikklitteratur:

  $n : NAT$
  $n ::= 0|S(n)$.

Generell induksjon og rekursjon

- Vi kan bruke den samme effektive notasjonen for å definere mengden av korrekte parentesuttrykk:

  Parentesuttrykk P
  $P ::= e|(P)|PP$

  som uttrykker at vi får parentesuttrykkene ved å starte med det tomme ordet e og deretter enten sette parenteser rundt et korrekt uttrykk eller sette to korrekte uttrykk sammmen.
- Som tidligere nevnt, liker informatikere og logikere å la de naturlige tallene starte med 0, altså å arbeide med $\mathbb{N}_0$ i stedet for $\mathbb{N}$.
- Følgende definisjon er påtruffet i informatikklitteratur:

  $n : NAT$
  $n ::= 0|S(n).$
- Dette skal leses som at vi definerer en datatype NAT ved å la n stå for et vilkårlig objekt, og vi finner objektene i NAT, enten som *symbolet* 0 eller som en *symbolsekvens* $S(w)$ hvor w er en symbolsekvens vi allerede vet er av type NAT.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.
- Ingen undervisning uke 12 grunnet Påske.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.
- Ingen undervisning uke 12 grunnet Påske.
- Ingen forelesning 24.03 av samme grunn.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.
- Ingen undervisning uke 12 grunnet Påske.
- Ingen forelesning 24.03 av samme grunn.
- Plenumsregningen 27.03 avlyses ikke likevel, men den kan bli flyttet.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.
- Ingen undervisning uke 12 grunnet Påske.
- Ingen forelesning 24.03 av samme grunn.
- Plenumsregningen 27.03 avlyses ikke likevel, men den kan bli flyttet.
- Uke 14, 31.3 - 4.4, er det ingen undervisning grunnet eksamensavvikling i andre emner.

Programmet videre

- Plenumsregningen 13.03 er avlyst av personlige grunner.
- Ingen undervisning uke 12 grunnet Påske.
- Ingen forelesning 24.03 av samme grunn.
- Plenumsregningen 27.03 avlyses ikke likevel, men den kan bli flyttet.
- Uke 14, 31.3 - 4.4, er det ingen undervisning grunnet eksamensavvikling i andre emner.
- Uke 15 tar Roger Antonsen all undervisning.

GOD PÅSKE