MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 19: Kombinatorikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

26. mars 2008

Oppsummering

- Før påske gikk vi gjennom kapitlene 1-7 i læreboka.
- De omfattet
  - Eksempler på algoritmer og bruk av pseudokoder.
  - Forskjellige tallsystemer.
  - Hvordan regning med hele tall og reelle tall foregår inne i en datamaskin.
  - Bruk av utsagnslogiske bindeord og kvantorer.
  - Mengder, relasjoner og funksjoner.
  - Induksjon og rekursjon.

Oppsummering

- Under forelesningene om relasjoner og funksjoner innførte vi mange nye begreper på kort tid.
- Vi beskrev hva det vil si at en relasjon er
  - Symmetrisk.
  - Antisymmetrisk.
  - Refleksiv.
  - Irrefleksiv.
  - Transitiv.
- Dette er begreper man bør kjenne til.

Oppsummering

- Under gjennomgangen av funksjoner lastet vi også på med mange nye begreper:
  - Definisjonsområde.
  - Verdiområde.
  - Bildemengde.
  - Injektiv funksjon.
  - Surjektiv funksjon.
  - Sammensetning av funksjoner.
  - Inverse funksjoner.
- Dette bør dere også kjenne til.

Oppsummering

- Vi fulgte boka da vi gikk igjennom
  - vanlige rekursive definisjoner.
  - bevis ved induksjon.
  - fremgangsmåte for løsning av rekurrenslikninger.
- Dette er kjernestoff, og meget sentralt i pensum.
- I tillegg så vi på andre induktivt definerte strukturer som
  - mengden av ord over et alfabet.
  - mengden av utsagnslogiske formler.
  - mengden av parentesuttrykk.

Oppsummering

- Disse eksemplene, og de tilhørende konstruksjonene ved rekursjon og bevisene ved induksjon er det en fordel å kjenne til, og slike ting kan bli etterspurt til eksamen.
- Et av eksemplene vi ga på bruk av induksjonsbevis er at binomialkoeffisienten

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

  forteller oss hvor mange delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer.
- Dette er det første ikke-trivielle resultatet i det vi kaller kombinatorikk, og *kombinatorikk* er temaet for resten av denne forelesningen.

OVER TIL KAPITTEL 9

Kombinatorikk

- KOMBINATORIKK er vitenskapen om hvordan man svarer på spørsmål som "hvor mange er det?" uten å telle.

Eksempel

- Spørsmål:

  Når de syv rette lottotallene er trukket ut, hvor mange forskjellige rekker har seks rette?

- Svar:

  Det er syv forskjellige måter å plukke ut seks rette fra de syv rette.

  Det er 27 måter å velge ut det ene tallet som er feil.

  Det gir $7 \cdot 27 = 189$ forskjellige rekker med seks rette.

Kombinatorikk

- Selv om sikkert også informatikere spiller Lotto, gir ikke dette eksemplet noen god forklaring på hvorfor informatikkstudenter bør lære seg kombinatorikk.
- Kombinatorikk inngår som et vesentlig element i sannsynlighetsteori.
- Kombinatorikk inngår også når man skal vurdere hvor lang tid et program trenger for å nå i mål og når man skal vurdere hvor stor lagringsplass man må sette av for at et program eller en programpakke skal få det nødvendige arbeidsrommet.
- Vi skal stort sett holde oss til den type resultater som står i læreboka, men vil forsøksvis gi eksemplene en informatikkvinkling, der det er naturlig.
- Selv for noen av disse eksemplene, er den direkte sammenhengen med informatikk litt påtatt.

Kombinatorikk

Eksempel

- Lagring av data i forskjellige registere kan illustreres ved lagring av kuler i bokser.
- Et naturlig spørsmål vil da være hvor mange forskjellige måter dette kan gjøres på.
- I dette eksemplet skal vi anta at vi har tretten kuler og fire bokser.
- Hvis vi spør om på hvor mange måter vi kan fordele 13 kuler på fire forskjellige bokser, er det to mulige presiseringer:

Kombinatorikk

Eksempel (Tilfelle 1)

- Alle kulene er forskjellige.
- Da har vi 13 kuler, og vi har fire muligheter for plassering av hver kule.
- Det gir
$$4^{13}$$
mulige fordelinger.

Kombinatorikk

Eksempel (Tilfelle 2)

- Kulene er like, mens boksene fortsatt er forskjellige, kall dem A, B, C og D.
- La

  $$xxxxxxxxxxxxxxxx$$

  være en mengde med 16 elementer (en mindre enn antall kuler pluss antall bokser).
- Det finnes

  $$\binom{16}{3}$$

  måter å omgjøre tre x til X på.

Kombinatorikk

Eksempel (Tilfelle 2, fortsatt)

- Eksempel
$$xxxXxxxxXxxXxxxx$$
- I dette tilfellet plasserer vi tre kuler i A (foran første X), fire kuler i B (mellom første og andre X), to kuler i C (mellom andre og tredje X) og fire kuler i D (bak siste X).
- Alle plasseringer av de tre X'ene gir oss en fordeling av kulene på de fire boksene.

Kombinatorikk

Eksempel (Tilfelle 2, fortsatt)

- Omvendt vil en fordeling av 13 kuler på boksene A, B, C og D gi oss en plassering av X'ene.
- Har vi to kuler i A, to i B, fem i C og fire i D svarer det til

$$xxXxxXxxxxxXxxxx.$$

Kombinatorikk

Merk

- Vi kunne ha formulert problemet om antall fordelinger også i det tilfellet hvor det ikke er forskjell på boksene.
- Det krever imidlertid at vi går ut over læreboka i en retning som ikke er prioritert, så det skal vi la ligge.
- Vi kunne også ha sett på tilfellet der vi har seks hvite og syv røde kuler.
- Dette er en utfordring dere bør kunne håndtere selv etter at forelesningen er over.

Kombinatorikk

- Det vi har lært av Tilfelle 2 i eksemplet over er at hvis vi skal fordele n identiske enheter på k forskjellige beholdere, finnes det

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}$$

  måter å gjøre det på.
- Vi skal se på et eksempel til.

Kombinatorikk

Eksempel

- To programmerere skal utarbeide et system for lagring av enkle data og senere statistisk analyse av disse dataene.
- Man regner med å skulle registrere 1000 enkeltdata, og den ene programmereren lar en random-generator fordele disse dataene på fem ulike registere.
- Den andre programmereren er avhengig av å vite hvor mange dataenheter som er lagret i hvert enkelt register for å kjøre statistikkpakkene sine, og påpeker at det er ufattelig mange måter de innkomne dataene kan fordeles på.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Vedkommende har rett, for det eksakte tallet er

$$\binom{1000+4}{4} = \frac{1004!}{1000! \cdot 4!} = \frac{1004 \cdot 1003 \cdot 1002 \cdot 1001}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

  måter.
- Det er i overkant av førti milliarder måter å fordele disse tusen dataenhetene på

Kombinatorikk

- Vi skal komme tilbake til opptelling av mulige fordelinger i forskjellige situasjoner.
- Først skal vi imidlertid se på en sammenheng mange kjenner fra sannsynlighetsteorien.
- I Læreboka går den under betegnelsen Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet.

Kombinatorikk

Eksempel

- På en skole er det 177 elever som driver aktiv idrett.

  103 av elevene er aktive om sommeren og 85 av elevene er aktive om vinteren.

  Det betyr at det er 188 aktiviteter fordelt på 177 elever.

  For at dette skal stemme, må 11 av elevene drive både sommer- og vinteridrett, siden det er 11 flere aktiviteter enn det er elever.
- Hvis vi lar S være mengden av elever som driver sommeridrett og V være mengden av elever som driver vinteridrett, ser vi at
  - $|S| = 103$
  - $|V| = 85$
  - $|S \cup V| = 177$
  - $|S \cap V| = 11$

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Det siste tallet regnet vi ut på grunnlag av de tre første.
- Vi ser at $|S| + |V| = |S \cup V| + |S \cap V|$ fordi det at det er flere aktiviteter enn elever skyldes at noen driver to aktiviteter, og differensen mellom antall aktiviteter og antall elever må være nøyaktig antallet på de som driver både sommer- og vinteridrett.

Kombinatorikk

Teorem (Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet)

La A og B være to endelige mengder.

Da er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Bevis

Hvis vi først teller opp elementene i A og deretter elementene i B, har vi talt elementene i $A \cap B$ to ganger.

For å få antall elementer i $A \cup B$ må vi derfor trekke fra det vi har talt for mye, nemlig antallet i $A \cap B$.

Kombinatorikk

Merk

- Det er en nær sammenheng mellom *inklusjons- og eksklusjonsprinsippet* og en tilsvarende lov om sannsynlighet:

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

  når A og B er uavhengige hendelser og P måler en sannsynlighet.
- Begge lovene illustreres greit med et Venn-diagram, hvor man ser at hvis vi skraverer sirkelskiven som markerer A i en retning og sirkelskiven som markerer B i en annen retning, er det akkurat feltet som markerer $A \cap B$ vi skraverer to ganger.

Kombinatorikk

Eksempel

- Anta at vi har fått følgende oppgave:

  Av 231 studenter var det 174 som greide oppgave 1 og 175 som greide oppgave 2.

  Alle studentene greide minst en oppgave.

  Hvor mange studenter greide begge oppgavene?

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Løsning:

  La A være mengden av studenter som greide oppgave 1 og B mengden av studenter som greide oppgave 2.

  Da er $|A \cup B| = 231$, $|A| = 174$ og $|B| = 175$.

  Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet sier oss at

  $$231 = 174 + 175 - |A \cap B|.$$

  Det gir oss at

  $$|A \cap B| = 174 + 175 - 231 = 118.$$

  Det var 118 studenter som greide begge oppgavene.

Kombinatorikk

Eksempel

La oss se på følgende oppgave:

- Medlemmene i et idrettslag blir bedt om å registrere seg på nettet med navn, adresse og enten e-postadresse eller mobilnummer.

  Ledelsen ønsker å automatisere utsendelsen av informasjon, uten å bruke to informasjonskanaler til samme medlem, men av de 728 medlemmene er det 94 som har oppgitt både e-postadresse og mobilnummer.

  Når vi vet at 562 medlemmer oppga e-postadresse, hvor mange oppga da mobilnummer?

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Løsning:

  La A være mengden av medlemmer som oppga e-postadresse og B være mengden av de som oppga mobilnummer.

  Da sier inklusjons- og eksklusjonsprinsippet at

  $$728 = 562 + |B| - 94$$

  så

  $$|B| = 728 + 94 - 562 = 260.$$

  Det var 260 medlemmer som oppga mobilnummer.

Kombinatorikk

- Det neste prinsippet for beregning av antall muligheter vi skal se på er multiplikasjonsprinsippet.
- Multiplikasjonsprinsippet sier at hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.
- Igjen finnes det en klar parallell i sannsynlighetsteori, hvor vi finnes sannsynligheten for at en serie uavhengige hendelser finner sted ved å ta produktet av sannsynlighetene for enkelthendelsene.
- Vi skal illustrere dette prinsippet ved et par eksempler.

Kombinatorikk

Eksempel

- Et norsk registreringsnummer for bil består av to store bokstaver og fem siffre.
- Vi bruker ikke bokstavene G, I, O, Q, Æ, Ø eller Å, fordi de enten ikke forekommer utenlands, eller fordi de kan forveksles med tall eller andre bokstaver.
- Da står vi igjen med $22 \cdot 22 = 484$ bokstavkombinasjoner.
- Første siffer i nummeret må være et av de ni tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, mens de fire andre sifrene kan hentes fra alle de ti tallsymbolene.
- Det gir tilsammen

$$22 \cdot 22 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 43.760.000$$

mulige registreringsnummere på norske biler.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Svenskene bruker tre bokstaver og tre tall, og hadde de begrenset seg til de bokstavene vi bruker i Norge, ville de kunne registrert færre biler.

Oppgave

Hvor mange bokstaver må svenskene tillate for å kunne registrere like mange biler (eller fler) enn det nordmennene kan?

Kombinatorikk

Eksempel

- Amerikanske lærebokforfattere lever i den tro at amerikanske collegestudenter lever en ikke ubetydelig del av livet sitt med å spise sammen.
- Derfor er følgende oppgave typisk for amerikanske lærebøker i diskret matematikk.
- En sandwich-bar tilbyr:
    1. Fire typer brød: Fint, mellomgrovt, grovt og glutenfritt.
    2. Tre typer smøring: Smør, majones og sennep.
    3. Seks typer hovedpålegg: Kalkun, roastbeef, skinke, tunfisk, skalldyr og soyaprotein.
    4. Fire typer tilbehør: Stekt bacon, salat, agurk og tomat.
    5. Tre valg på dressing, Thousen Islands, tomatdressing eller hvitløksdressing.
- Hvor mange forskjellige sandwicher er det mulig å komponere?

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

Selv om ikke alle sammensetningene vil være like vellykkede rent smaksmessig, er det ingen føringer på hvilke valg som kan kombineres.

Da finner vi det totale antall muligheter ved å bruke multiplikasjonsprinsippet.

- Vi har da
$$4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3 = 864$$
forskjellige sammensetninger.

Kombinatorikk

Vi har nå gjennomgått nok teori til at følgende oppgave skal være lett:

Oppgave

a) Vi skal fordele syv like hvite kuler og seks like røde kuler på fire forskjellige bokser.

   Hvor mange måter kan dette gjøres på?

b) Hvis vi krever at de hvite kulene skal ligge i de tre første boksene og de røde i de tre siste, hvor mange mulige fordelinger har vi da?

c) Løs a) hvis vi i utgangspunktet bare hadde tre bokser, og sammenlikn svaret med svaret fra b).

   Forklar det du observerer.

Kombinatorikk

- Det neste vi skal se på er hva vi mener med en permutasjon og på hvordan vi kan telle opp antall permutasjoner av en ordnet mengde.
- En permutasjon er en endring av en rekkefølge, eller en omstokking.
- Når vi stokker en kortstokk er poenget at kortene skal ligge i en annen rekkefølge, og med en fremmedord kan vi si at vi permuterer kortene.
- Vi skal se på noen eksempler.

Kombinatorikk

Eksempel

- På hvor mange forskjellige måter kan vi skrive tallene 1, 2 og 3 i rekkefølge?
- Vi har tre valg for hvilket tall vi vil skrive først: 1, 2 eller 3.
- For hvert av disse valgene har vi to valg for hvilket som blir det neste tallet;

  Starter vi med 1 må det neste tallet være 2 eller 3, starter vi med 2 må det neste tallet være 1 eller 3 og starter vi med 3 må det neste tallet være 1 eller 2.
- Har vi bestemt hvilke to tall vi skriver først, gir det siste tallet seg av seg selv.
- Det finnes altså $3 \cdot 2 = 6$ måter å skrive disse tre tallene i rekkefølge på.

Kombinatorikk

Eksempel

- Hvis vi utvider eksemplet vårt fra forrige side til å omfatte tallene 1, 2, 3 og 4 vil antall permutasjoner vokse til $4! = 24$ og tar vi med 5 i tillegg er antallet $5! = 120$.
- I det siste tilfellet har vi først fem valg for hvilket tall som skal skrives først, deretter fire valg for tall nr. 2, tre valg for tall nr. 3 og to valg for tall nr. 4. Det siste tallet gir seg selv.
- Generelt finnes det $n!$ permutasjoner av tallene $1, \ldots, n$.
- Dette svarer også til hvor mange rekkefølger vi kan sette n elementer i. Eksempelvis kan syv studenter ordnes på $7! = 6720$ måter.

Kombinatorikk

Eksempel

- Et kjent problem i litteraturen er Den handelsreisendes problem (The traveling salesman).
- Hvis vi har gitt n byer som skal besøkes, og vi kjenner avstanden mellom to og to av byene, hva er da den korteste veien gjennom alle byene?
- Det er ennå ingen som har kommet opp med et program som løser dette problemet når antall byer er stort, som for eksempel alle tettsteder i Norge med mer enn 300 innbyggere.
- Vi skal se på hva dette problemet kan ha med antall permutasjoner å gjøre.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

Hvis antall byer som skal besøkes er mindre, blir selvfølgelig oppgaven gjennomførbar.

Anta at vi har fått i oppdrag å skrive et program som finner den korteste reiseruten fra by A til by B, og som går gjennom ti andre byer $C_1, \ldots, C_{10}$ i en eller annen rekkefølge.

Igjen kan vi anta at alle avstander er kjent.

En måte å gjøre dette på er å liste opp alle mulige rekkefølger vi kan besøke byene $C_1, \ldots, C_n$ i, regne ut alle reiselengdene og så velge ut den korteste.

Problemet er at det finnes $10! = 3.628.800$ forskjellige rekkefølger vi kan velge mellom.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Det betyr altså at det finnes over tre og en halv million måter å reise fra Oslo til Kirkenes på, når reisen skal gå via
  - Kristiansand
  - Stavanger
  - Bergen
  - Molde
  - Kristiansund
  - Trondheim
  - Bodø
  - Narvik
  - Tromsø
  - Alta

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

Øker vi antall byer som skal besøkes til 12, hvis vi for eksempel vil besøke Haugesund og Levanger i tillegg, vil vi være i nærheten av 400.000.000 enkeltruter, og da begynner de raske maskinene å slite.

Det vil gå flere generasjoner maskiner mellom hver gang vi kan øke antall byer med 1 hvis vi bruker denne naive måten.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Det man i praksis gjør er å akseptere at det er dumt å bruke år på å finne ut av om man kan spare noen få kilometers reise, og utvikler raske algoritmer som gir effektive reiseruter, uten å garantere at den finner den mest effektive.
- Det finnes elektroniske reiseplanleggere som må forene hensynet til kort regnetid og et godt resultat.
- Tilsvarende optimeringsproblemer finner man for effektiv utnyttelse av lagerplass, effektiv organisering av produksjonsleddene i en bedrift og liknende.

Kombinatorikk

Eksempel

- Dette eksemplet er stjålet fra en tidligere lærebok i diskret matematikk.
- Hvor mange ord kan vi skrive ved hjelp av bokstavene i

  MISSISSIPPI?
- Det er 11 bokstaver, og har vi en blytype for hver bokstav, kan vi sette disse i 11! forskjellige rekkefølger.

Kombinatorikk

Eksempel (Fortsatt)

- Rekkefølgen vi setter de to P'ene i, betyr imidlertid ikke noe for resultatet. Det alene halverer antall ord vi kan skrive.
- Det er fire I'er og fire S'er. Den innbyrdes rekkefølgen blant I'ene og blant S'ene betyr heller ikke noe for hvordan det ferdige ordet ser ut.
- Det er $4! = 24$ måter å trykke de fire S'ene og $4! = 24$ måter å trykke de fire I'ene på.
- Det betyr at antall forskjellige ord vi kan skrive er

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650.$$

Kombinatorikk

Oppgave

Hvor mange forskjellige ord kan vi skrive ved å stokke om på bokstavene i ordet

PUSLESPILL

Regn ut svaret fullstendig.