Forelesning 20

Kombinatorikk

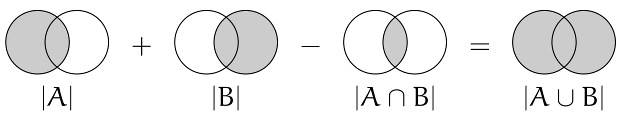
Roger Antonsen - 7. april 2008

Kombinatorikk

- Kombinatorikk er studiet av *opptellinger*, *kombinasjoner* og *permutasjoner*.
- Vi finner svar på spørsmål "Hvor mange måter ...?" uten å telle.
- Viktig del av f.eks. kompleksitetsanalyse av algoritmer.
  - Hvor mye *tid* bruker en algoritme?
  - Hvor mye *plass* bruker en algoritme?
- Grunnleggende, nyttig og fascinerende matematikk som dere må beherske.
- Vi skal i dag gjøre oss ferdige med kapittel 9.
- Først litt repetisjon.

Repetisjon

- Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet:



- Hvis vi først teller opp elementene i A og deretter elementene i B, har vi talt elementene i $A \cap B$ to ganger.
- For å få antall elementer i $A \cup B$ må vi derfor trekke fra det vi har talt for mye, nemlig antallet i $A \cap B$.

Repetisjon

- Multiplikasjonsprinsippet:
  Hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.

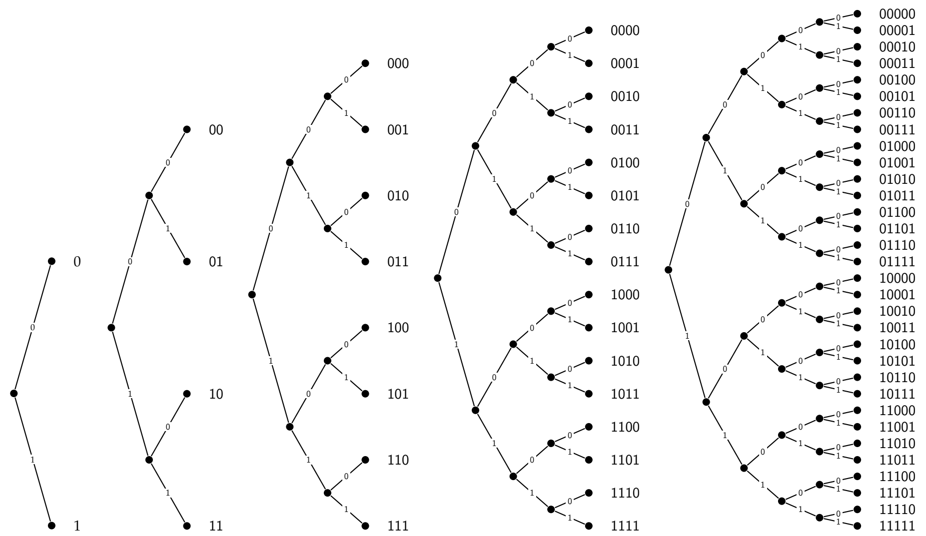
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

  Antall elementer i det kartesiske produktet $A \times B$ er antall elementer i A multiplisert med antall elementer i B.

- Begge prinsippene kan generaliseres til flere enn to mengder.
  - Generaliseringen av inklusjons- og eksklusjonsprinsippet ses lett ved hjelp av Venn-diagrammer.
  - Generaliseringen av multiplikasjonsprinsippet blir

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Eksempel - det er 2^n binære tall av lengde n

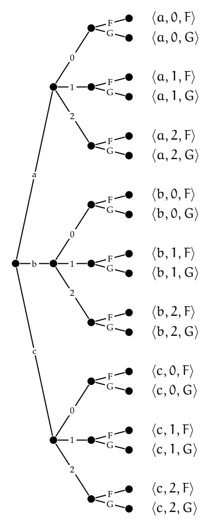


Eksempel - $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}$

Multiplikasjonsprinsippet gir oss følgende:

$$\begin{aligned}&|\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}|\\ &= |\{a, b, c\}| \cdot |\{0, 1, 2\}| \cdot |\{F, G\}|\\ &= 3 \cdot 3 \cdot 2\\ &= 18\end{aligned}$$

Vi kan illustrere det slik:



Mer repetisjon

Definisjon (Permutasjon).
En *permutasjon* en endring av rekkefølgen av elementene i en ordnet mengde. Vi sier også at en *permutasjon* av en mengde er en ordning av elementene i mengden.

Eksempel. Permutasjonene av $\{A, B, C\}$ er ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

- Det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.
- Og vi vet (selvfølgelig) at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$
- I eksempelet har vi 3 elementer og $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner.

Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg $\quad {}^{n}P_{r}$
- Mer om kombinasjoner $\quad \binom{n}{r} \quad$ "n velg r"
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant
- Generalisering av første kvadratsetning $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Oppsummering av kombinatoriske prinsipper
- Eksempler og oppgaver

Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles ordnet utvalg fra en mengde.

Eksempel.

Oppgave:
I et barneskirenn er det med 20 barn.
Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.
Hvor mange forskjellige resultatlister kan man få?

Eksempel (Fortsatt).

Løsning:
Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.
Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

- Vi skal nå definere dette mer generelt og bruke notasjonen ${}^{20}P_3$ for dette tallet.

Definisjon.
- La r og n være naturlige tall slik at $r \leqslant n$.
- Med ${}^{n}P_r$ mener vi $\dfrac{n!}{(n-r)!}$

Merk.
- ${}^{n}P_r$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke r elementer i *rekkefølge* ut fra en mengde med n elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$${}^{n}P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

- Det er som forventet, siden det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer i.

Eksempel.
- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafettlag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.
- Da er det ${}^{7}P_4 = \dfrac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskjellige mulige laguttak.
- Det er et under at avisene mener seg å vite hva uttaket vil bli dagen i forveien.

Kombinasjoner

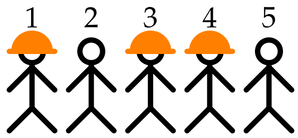
$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.
- Slike tall kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

Eksempel

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$, som er $\binom{5}{3}$.

Teorem.
- La A være en mengde med n elementer, og la $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Da finnes det
$$\binom{n}{k}$$
forskjellige delmengder B av A.

Bevis (Nytt, og fritt for induksjon).

- Antall måter å velge k elementer *i rekkefølge* fra A på er
$$ {}^nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- For hver delmengde B med k elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra A som gir oss B.
- Da må antall mengder B med k elementer være
$$\frac{{}^nP_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

- Legg merke til at
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- Hvorfor det?

- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
  - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
  - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20\cdot 19}{2\cdot 1} = 190$.
- Antall delmengder av størrelse k må være lik antall delmengder av størrelse $n-k$.
- Det er like mange måter å velge n elementer på som det er å måter å *velge bort* n elementer på.

Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

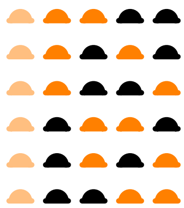
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Hvorfor er det slik? La oss se på et eksempel.

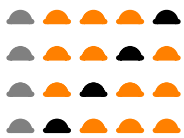
- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.



Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
  - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$
  - Ved rekursjon:
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
- Husk at
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$
- Vi får følgende bilde.

Pascals trekant

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&& \\
&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&& \\
&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&& \\
&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&& \\
&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} && \\
& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6}
\end{array}$$

- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant
  - De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
  - De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
  - Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...
  - Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,...
  - Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,...
  - Og mange flere...

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a+b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a+b)^1 = a+b$.
- Mange vet at $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.
- Siden $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ blir den anelsen bekreftet.

Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning).
For alle tall a og b og alle hele tall $n \geqslant 0$ har vi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bevis.

- $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ forekomster}}$

- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi 2^n ledd.
- Hvert ledd består av n faktorer, hvor hver faktor er enten a eller b, f.eks. $abaa \cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \ldots, n\}$, så lar vi B svare til leddet hvor faktor nummer i er b hvis $i \in B$ og a ellers.
- F.eks. vil $\{1, 4, 5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a} \cdots \underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde B; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av A til leddene vi får når vi regner ut $(a + b)^n$.

Bevis (Fortsatt).

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av A med k elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med k b'er og $n - k$ a'er.
- Disse leddene ordnes til
$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
- Dette er nøyaktig leddet med indeks k i teoremet.
- Siden k er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a + b)^n$.
- Dette avslutter beviset.

Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: n^r
  - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
  - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^nP_r$
  - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
  - Det er ${}^{52}P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
  - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
  - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
  - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
  - Det er $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

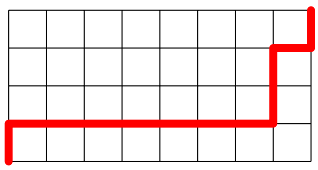
Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

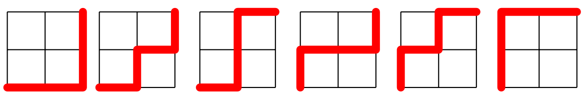
- Bredden til et hårstrå: 10^6 atomer.
- Atomer i en vanndråpe: 10^{21} atomer.
- Atomer i universet: 10^{80} atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...
- Allikevel kan vi representere dem og regne på dem uten store problemer.

Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



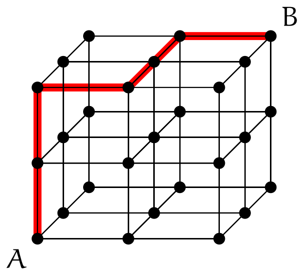
- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er $\uparrow$ og åtte av tegnene er $\rightarrow$.
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$
- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



- Antall ord blir i dette tilfellet:
$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$
som stemmer...

Oppgave

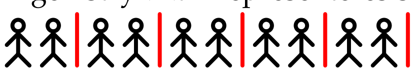
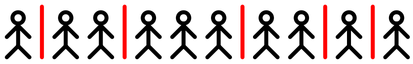
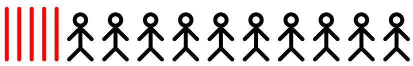
På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i denne $2 \times 2 \times 2$-kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?



Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er 6^{10}? `Nei`
- La oss lage 6 båser og putte studentene i hver sin bås avhengig av hvilken karakter de får.

Eksempel

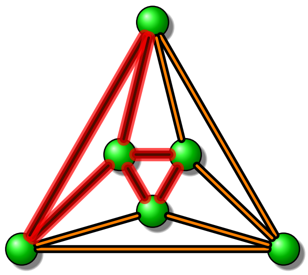
- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:

- Fordelingen 123211 kan representeres slik:

- At alle stryker kan representeres slik:

- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være
$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$$

Eksempel

- Mer generelt har vi
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$
som gir hvor mange forskjellige måter vi kan fordele n identiske elementer i k forskjellige beholdere på.
- Dette kalles også for uordnet utvalg *med repetisjon*.

Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*:



- Oppgave: klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?