

MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 20: Kombinatorikk

Roger Antonsen

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

7. april 2008

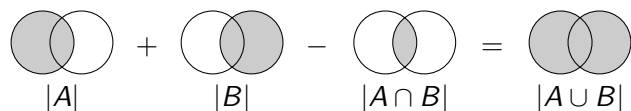


Kombinatorikk

- Kombinatorikk er studiet av *opptellinger, kombinasjoner og permutasjoner*.
- Vi finner svar på spørsmål “Hvor mange måter ...?” uten å telle.
- Viktig del av f.eks. kompleksitetsanalyse av algoritmer.
 - Hvor mye *tid* bruker en algoritme?
 - Hvor mye *plass* bruker en algoritme?
- Grunnleggende, nyttig og fascinerende matematikk som dere må beherske.
- Vi skal i dag gjøre oss ferdige med kapittel 9.
- Først litt repetisjon.

Repetisjon

- Inklusjons- og eksklusjonsprinsippet:



- Hvis vi først teller opp elementene i A og deretter elementene i B , har vi talt elementene i $A \cap B$ to ganger.
- For å få antall elementer i $A \cup B$ må vi derfor trekke fra det vi har talt for mye, nemlig antallet i $A \cap B$.

Repetisjon

- Multiplikasjonsprinsippet:
Hvis vi skal treffe en serie uavhengige valg, vil det totale antall muligheter være produktet av antall muligheter ved hvert valg.

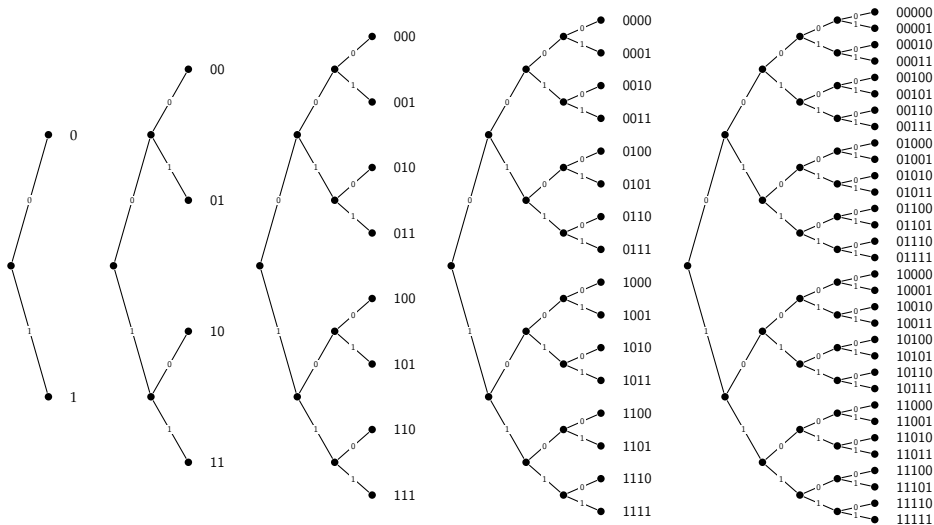
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Antall elementer i det kartesiske produktet $A \times B$ er antall elementer i A multiplisert med antall elementer i B .

- Begge prinsippene kan generaliseres til flere enn to mengder.
 - Generaliseringen av inklusjons- og eksklusjonsprinsippet ses lett ved hjelp av Venn-diagrammer.
 - Generaliseringen av multiplikasjonsprinsippet blir

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Eksempel - det er 2^n binære tall av lengde n

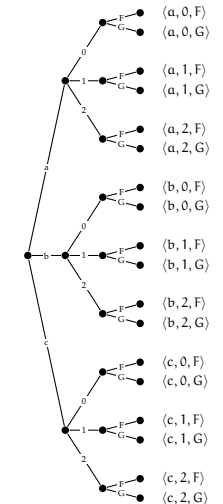


Eksempel - $\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}$

Multiplikasjonsprinsippet gir oss følgende:

$$\begin{aligned}
 & |\{a, b, c\} \times \{0, 1, 2\} \times \{F, G\}| \\
 &= |\{a, b, c\}| \cdot |\{0, 1, 2\}| \cdot |\{F, G\}| \\
 &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

Vi kan illustrere det slik:



Mer repetisjon

Definisjon (Permutasjon)

En *permutasjon* er en endring av rekkefølgen av elementene i en ordnet mengde. Vi sier også at en *permutasjon* av en mengde er en ordning av elementene i mengden.

Eksempel

Permutasjonene av $\{A, B, C\}$ er $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

- Det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer.
- Og vi vet (selvfølgelig) at $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$
- I eksemplet har vi 3 elementer og $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutasjoner.

Plan for dagen

- Mer om permutasjoner og ordnet utvalg ${}^n P_r$
- Mer om kombinasjoner $\binom{n}{r}$ "n velg r"
- Binomialkoeffisientene
- Pascals trekant
- Generalisering av første kvadratsetning $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Oppsummering av kombinatoriske prinsipper
- Eksempler og oppgaver

Ordnet utvalg

Vi skal nå se på det som kalles **ordnet utvalg** fra en mengde.

Eksempel

Oppgave:

I et barneskirenn er det med 20 barn.

Det er lov til å opplyse om hvem som tok de tre første plassene, mens resten ikke skal rangeres.

Hvor mange forskjellige resultatlister kan man få?

Eksempel (Fortsatt)

Løsning:

Det fins 20 mulige vinnere, deretter 19 mulige andreplasser og til sist 18 mulige tredjeplasser.

Det fins altså $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ forskjellige resultatlister.

- Legg merke til at

$$20 \cdot 19 \cdot 18 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1}{17 \cdot 16 \cdots 2 \cdot 1} = \frac{20!}{(20-3)!}$$

- Vi skal nå definere dette mer generelt og bruke notasjonen ${}^{20}P_3$ for dette tallet.

Definisjon

- La r og n være naturlige tall slik at $r \leq n$.
- Med ${}^n P_r$ mener vi $\frac{n!}{(n-r)!}$

Merk

- ${}^n P_r$ forteller oss hvor mange måter vi kan trekke r elementer i rekkefølge ut fra en mengde med n elementer på.

- Når $n = r$ bruker vi at $0! = 1$. Da får vi

$${}^n P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

- Det er som forventet, siden det er $n!$ permutasjoner av en mengde med n elementer i.

Eksempel

- En idrettsleder har syv løpere i stallen sin, og skal velge ut fire av dem til å delta i en stafett.
- I et stafetlag spiller rekkefølgen stor rolle, især om idrettsgrenen er langrenn og det er to etapper i klassisk og to i fristil.
- Da er det ${}^7 P_4 = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ forskjellige mulige laguttak.
- Det er et under at avisene mener seg å vite hva uttaket vil bli dagen i forveien.


Kombinasjoner

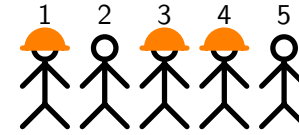
$$\binom{n}{k}$$

angir hvor mange delmengder med k elementer det finnes av en mengde med n elementer

- Vi har tidligere vist dette ved induksjon.
- Det er også mulig å vise dette rent kombinatorisk, som vi skal gjøre snart.
- Slike tall kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.

Eksempel

- Anta at vi skal fordele tre oransje hatter, , på fem barn.



- Hver kombinasjon svarer til en delmengde av $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Antall måter å velge tre barn på *i rekkefølge* er ${}^5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Her vil hver kombinasjon av hatter, f.eks. $\{1, 3, 4\}$, bli telt $3! = 6$ ganger, som 134, 143, 314, 341, 413, og 431.
- Hvis vi skal ta høyde for dette, så må vi dele på 6.
- Antall måter å fordele hattene er derfor $60/6 = 10$, som er $\binom{5}{3}$.

Teorem

- La A være en mengde med n elementer, og la $0 \leq k \leq n$.
- Da finnes det

$$\binom{n}{k}$$

forskjellige delmengder B av A .

Bevis (Nytt, og fritt for induksjon)

- Antall måter å velge k elementer *i rekkefølge* fra A på er

$${}^n P_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- For hver delmengde B med k elementer, så fins det $k!$ forskjellige ordnede utvalg fra A som gir oss B .
- Da må antall mengder B med k elementer være

$$\frac{{}^n P_k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

- Legg merke til at

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$



- Hvorfor det?
- For eksempel, hvis vi har en mengde med 20 elementer, så er det $\binom{20}{18}$ delmengder med 18 elementer.
- For hver slik mengde, så har vi også en mengde med 2 elementer.
 - Vi kan f.eks. lage en funksjon som til enhver delmengde av størrelse 18 gir en delmengde av størrelse 2.
 - Denne funksjonen vil være både surjektiv og injektiv.
- Derfor har vi at $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1} = 190$.
- Antall delmengder av størrelse k må være lik antall delmengder av størrelse $n - k$.
- Det er like mange måter å velge n elementer på som det er å måter å velge bort n elementer på.

Binomialkoeffisientene

- Tallene $\binom{n}{k}$ kalles blant annet for *binomialkoeffisienter*.
- Følgende (rekursive) sammenheng var utgangspunktet for et tidligere induksjonsbevis:

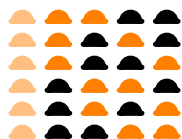
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Hvorfor er det slik? La oss se på et eksempel.

- Tre, , av fem hatter, , skal være oransje.
- Hvor mange måter kan dette gjøres på?

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$$

- Hvis den første hatten er oransje, så må to av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{2} = 6$ måter å gjøre dette på.



- Hvis den første hatten er svart, så må *tre* av de fire resterende hattene være oransje. Det er $\binom{4}{3} = 4$ måter å gjøre dette på.



Binomialkoeffisientene

- Dette forteller oss at det er to ekvivalente måter å definere binomialkoeffisientene på:
 - Ved hjelp av fakultetsfunksjonen og brøk:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Ved rekursjon:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascals trekant

- Pascals trekant er en måte å skrive opp alle binomialkoeffisientene på ved hjelp av formelen

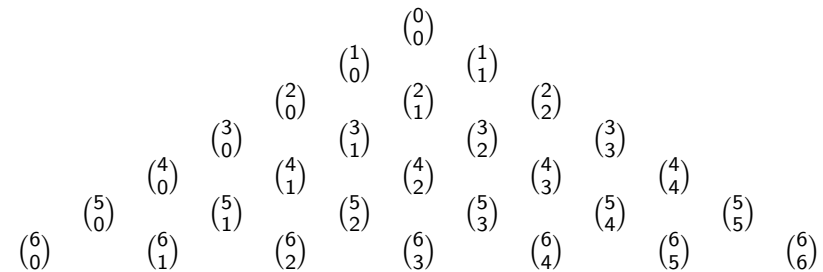
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Husk at

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

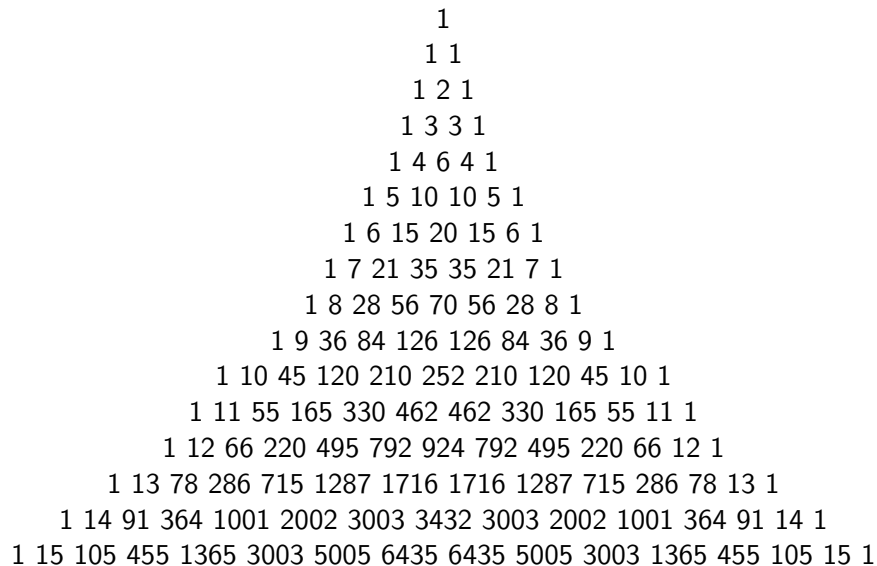
- Vi får følgende bilde.

Pascals trekant



- Vi finner igjen mange kjente tallrekker i Pascals trekant

- De naturlige tallene: 1,2,3,4,5,6,...
- De såkalte triangulære tallene: 1,3,6,10,15,21,...
- Toerpotensene: 1,2,4,8,16,32,...
- Kvadrattallene: 1,4,9,16,25,...
- Fibonacci-tallene (selv om de er godt gjemt): 1,1,2,3,5,8,13,21,...
- Og mange flere...



Tilbake til binomialkoeffisientene

- Nesten alle vet at $(a + b)^0 = 1$.
- Alle vet at $(a + b)^1 = a + b$.
- Mange vet at $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- De fleste kan regne ut at $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- Noen greier til og med å regne ut at $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
- Noen bør begynne å ane at det er en sammenheng med Pascals trekant.
- Siden $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ blir den anelsen bekreftet.

Teorem (Generalisering av 1. kvadratsetning)

For alle tall a og b og alle hele tall $n \geq 0$ har vi

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bevis

- $(a + b)^n = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ forekomster}}$
- Hvis vi multipliserer dette ut, så får vi 2^n ledd.
- Hvert ledd består av n faktorer, hvor hver faktor er enten a eller b , f.eks. $abaa \cdots b$.
- Hvis $B \subseteq A = \{1, \dots, n\}$, så lar vi B svare til leddet hvor faktor nummer i er b hvis $i \in B$ og a ellers.
- F.eks. vil $\{1, 4, 5\}$ svare til leddet $\underset{1}{b}\underset{2}{a}\underset{3}{a}\underset{4}{b}\underset{5}{b}\underset{6}{a} \cdots \underset{n}{a}$
- Hvert ledd kommer fra en og bare en mengde B ; det vi har beskrevet er en surjektiv og injektiv funksjon fra potensmengden av A til leddene vi får når vi regner ut $(a + b)^n$.

Bevis (Fortsatt)

- Det fins $\binom{n}{k}$ delmengder av A med k elementer.
- Da fins det $\binom{n}{k}$ ledd med k b 'er og $n - k$ a 'er.
- Disse leddene ordnes til

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- Dette er nøyaktig leddet med indeks k i teoremet.
- Siden k er vilkårlig må formelen i teoremet gi oss verdien på $(a + b)^n$.
- Dette avslutter beviset.

Oppsummering av regneprinsipper

- Ordnet utvalg med repetisjon: n^r
 - Hvor mange binære tall av lengde 5 fins det?
 - Det er $2^5 = 32$.
- Ordnet utvalg uten repetisjon: ${}^n P_r$
 - På hvor mange måter kan vi trekke to kort fra en kortstokk?
 - Det er ${}^{52} P_2 = 52 \cdot 51 = 2652$.
- Permutasjoner: $n!$
 - På hvor mange måter kan vi stokke om ordet LAKS?
 - Det er $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
- Kombinasjoner: $\binom{n}{k}$
 - Hvor mange delmengder av $\{a, b, c, d, e\}$ har to elementer?
 - Det er $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
- Vi skal se på noen flere eksempler.

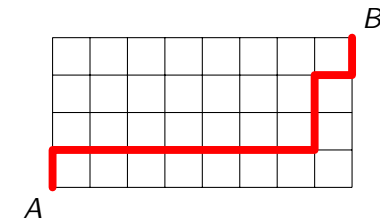
Først en liten digresjon om store tall

I kombinatorikk kommer vi fort opp i *veldig* store tall.

- Bredden til et hårstrå: 10^6 atomer.
- Atomer i en vandrdåpe: 10^{21} atomer.
- Atomer i universet: 10^{80} atomer.
- Antall forfedre 265 generasjoner tilbake = antall atomer i universet.
- Og disse tallene er ganske små...
- Allikevel kan vi representere dem og regne på dem uten store problemer.

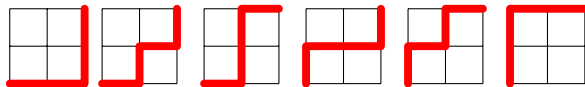
Eksempel

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i dette 8 ganger 4-rutenettet? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover eller til høyre.



- Hvor mange slike stier er det?
- Denne stien kan representeres som $\uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow$.
- Dette er et ord på 12 tegn over alfabetet $\{\uparrow, \rightarrow\}$ hvor fire av tegnene er \uparrow og åtte av tegnene er \rightarrow .
- Hvor mange slike ord er det? Det er $\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$

- Vi sjekker at det stemmer for 2 ganger 2-rutenettet:



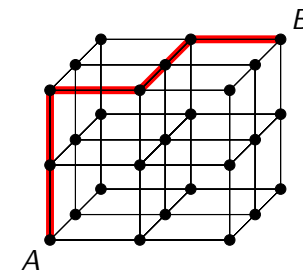
- Antall ord blir i dette tilfellet:

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

som stemmer...

Oppgave

På hvor mange forskjellige måter kan vi gå fra A til B i denne $2 \times 2 \times 2$ -kuben? Vi må gå ett steg av gangen og kun oppover, til høyre eller innover?



Eksempel

- (Dette ble også nevnt på forrige forelesning i et introduksjonseksempel om kuler og bokser.)
- På hvor mange ulike måter kan de 6 karakterene A til F gis til 10 studenter?
- Vi ikke er interessert i hvilken karakter en bestemt student får, men kun antallet av hver karakter i fordelingen.
- Det er 6 muligheter for hver av de 10 studentene.
- Kan vi bruke multiplikasjonsprinsippet og si at svaret er 6^{10} ? **Nei**
- La oss lage 6 båser og putte studentene i hver sin bås avhengig av hvilken karakter de får.

Eksempel

- 2 studenter per karakter, og ingen stryk kan representeres slik:



- Fordelingen 123211 kan representeres slik:



- At alle stryker kan representeres slik:



- Hvor mange slike kombinasjoner fins det?
- Av 15 tegn må 5 være røde streker.
- Antall muligheter må være

$$\binom{15}{5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3003$$

Eksempel

- Mer generelt har vi

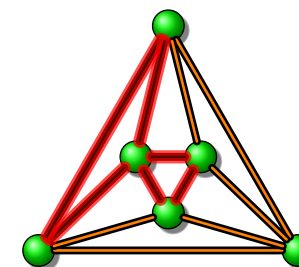
$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

som gir hvor mange forskjellige måter vi kan fordele n identiske elementer i k forskjellige beholdere på.

- Dette kalles også for uordnet utvalg *med repetisjon*.

Grafteori

- Neste gang begynner vi med *grafteori*.
- En *graf* består av *noder* og *kanter*.



- Oppgave: klarer dere å tegne denne på et ark uten å løfte blyanten og uten å gå over en kant to ganger?