MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 28: Grafer og trær, eksempler

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

5. mai 2008

Grafer og trær

- I dag skal vi se på en rekke eksempeloppgaver, og gjennomgå løsningene på tavla.

Grafer og trær

- I dag skal vi se på en rekke eksempeloppgaver, og gjennomgå løsningene på tavla.
- Alle eksemplene er oppgaver som ville kunne bli gitt til eksamen, enten alene, eller som en del av en større oppgave.

Grafer og trær

- I dag skal vi se på en rekke eksempeloppgaver, og gjennomgå løsningene på tavla.
- Alle eksemplene er oppgaver som ville kunne bli gitt til eksamen, enten alene, eller som en del av en større oppgave.
- Eksemplene er hentet fra kapitlene om grafer og trær, og fra det stoffet i tilknytning til disse kapitlene som ikke er behandlet i læreboka.

Grafer og trær

- I dag skal vi se på en rekke eksempeloppgaver, og gjennomgå løsningene på tavla.
- Alle eksemplene er oppgaver som ville kunne bli gitt til eksamen, enten alene, eller som en del av en større oppgave.
- Eksemplene er hentet fra kapitlene om grafer og trær, og fra det stoffet i tilknytning til disse kapitlene som ikke er behandlet i læreboka.
- Selvfølgelig vil ikke eksamen kunne dekke alle aspekter ved grafer og trær.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.
   Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.
2. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og to noder med grad 3.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.
2. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og to noder med grad 3.
3. En node med grad 3 og to noder med grad 4.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.
2. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og to noder med grad 3.
3. En node med grad 3 og to noder med grad 4.
4. To noder med grad 2, to noder med grad 3 og en node med grad 4.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

   Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

   Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

   1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.
   2. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og to noder med grad 3.
   3. En node med grad 3 og to noder med grad 4.
   4. To noder med grad 2, to noder med grad 3 og en node med grad 4.

b) Finn eksempler på sammenhengende grafer som har noder og grader som beskrevet i de to tilfellene det er mulig.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vi har gitt forslag til hva graden til nodene i en graf er.

Det er bare to av forslagene som kan realiseres av en graf.

Finn ut hvilke forslag som ikke kan realiseres, og forklar hvorfor ikke.

1. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og en node med grad 3.
2. To noder med grad 1, to noder med grad 2 og to noder med grad 3.
3. En node med grad 3 og to noder med grad 4.
4. To noder med grad 2, to noder med grad 3 og en node med grad 4.

b) Finn eksempler på sammenhengende grafer som har noder og grader som beskrevet i de to tilfellene det er mulig.

c) En av grafene vil ha en Eulersti. Finn en Eulersti i den grafen som har det, og forklar hvorfor den andre grafen ikke har noen Eulersti.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Hvis G er en graf med fem noder, hva er det minste antall kanter G kan ha og likevel være sammenhengende.

Grafer og trær

Eksempel

a) Hvis G er en graf med fem noder, hva er det minste antall kanter G kan ha og likevel være sammenhengende.

b) Finn to sammenhengende grafer med minimalt antall noder som ikke er isomorfe. Forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

Grafer og trær

Eksempel

a) Hvis G er en graf med fem noder, hva er det minste antall kanter G kan ha og likevel være sammenhengende.

b) Finn to sammenhengende grafer med minimalt antall noder som ikke er isomorfe. Forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

c) Finnes det to sammenhengende grafer med fem noder og minimalt med kanter som ikke er isomorfe, slik at begge har en Eulersti?

Grafer og trær

Eksempel

a) Hvis G er en graf med fem noder, hva er det minste antall kanter G kan ha og likevel være sammenhengende.

b) Finn to sammenhengende grafer med minimalt antall noder som ikke er isomorfe. Forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

c) Finnes det to sammenhengende grafer med fem noder og minimalt med kanter som ikke er isomorfe, slik at begge har en Eulersti?

Begrunn svaret.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

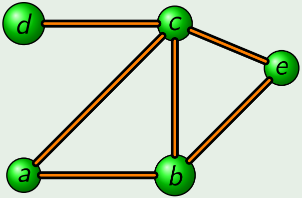
Eksempel

a) Vis hvordan følgende graf kan representeres som en matrise:

Grafer og trær

Eksempel

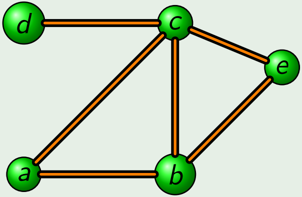
a) Vis hvordan følgende graf kan representeres som en matrise:



Grafer og trær

Eksempel

a) Vis hvordan følgende graf kan representeres som en matrise:

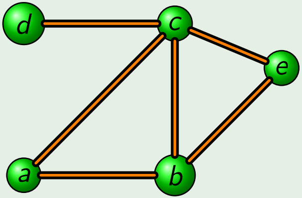


b) Bestem graden til hver av nodene og avgjør om grafen har en Eulersti eller en Eulerkrets.

Grafer og trær

Eksempel

a) Vis hvordan følgende graf kan representeres som en matrise:



b) Bestem graden til hver av nodene og avgjør om grafen har en Eulersti eller en Eulerkrets.

Begrunn svaret ditt.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Forklar forskjellen på en krets og en sykel.

Grafer og trær

Eksempel

a) Forklar forskjellen på en krets og en sykel.
   Er alle kretser sykler?

Grafer og trær

Eksempel

a) Forklar forskjellen på en krets og en sykel.

Er alle kretser sykler?

Er alle sykler kretser?

Grafer og trær

Eksempel

a) Forklar forskjellen på en krets og en sykel.

   Er alle kretser sykler?

   Er alle sykler kretser?

b) Finn alle sykler i grafen under, og finn en krets som ikke er en sykel.

Grafer og trær

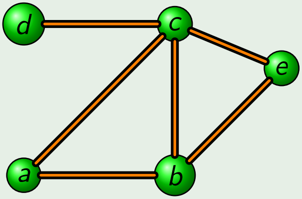
Eksempel

a) Forklar forskjellen på en krets og en sykel.

Er alle kretser sykler?

Er alle sykler kretser?

b) Finn alle sykler i grafen under, og finn en krets som ikke er en sykel.



Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

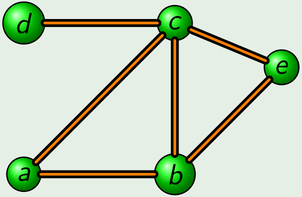
Eksempel

a) Finn komplementet til grafen

Grafer og trær

Eksempel

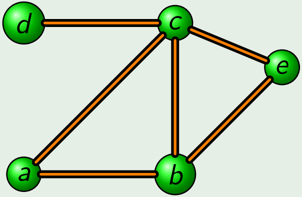
a) Finn komplementet til grafen



Grafer og trær

Eksempel

a) Finn komplementet til grafen



b) Er komplementet sammenhengende?

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Finnes det et tre med ni noder slik at fire av disse nodene har grad 4?

Grafer og trær

Eksempel

a) Finnes det et tre med ni noder slik at fire av disse nodene har grad 4? Begrunn svaret.

Grafer og trær

Eksempel

a) Finnes det et tre med ni noder slik at fire av disse nodene har grad 4? Begrunn svaret.

b) Finn to trær som ikke er isomorfe slik at begge har ni noder hvorav to har grad 4.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

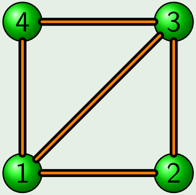
Eksempel

a) Finn et utspennende tre i følgende graf:

Grafer og trær

Eksempel

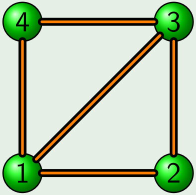
a) Finn et utspennende tre i følgende graf:



Grafer og trær

Eksempel

a) Finn et utspennende tre i følgende graf:

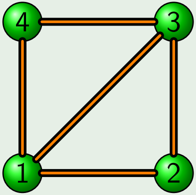


b) Finn et annet utspennende tre som ikke er isomorft med det første.

Grafer og trær

Eksempel

a) Finn et utspennende tre i følgende graf:



b) Finn et annet utspennende tre som ikke er isomorft med det første.

c) Kan det finnes utspennende trær som ikke er isomort med noen av de to andre?

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

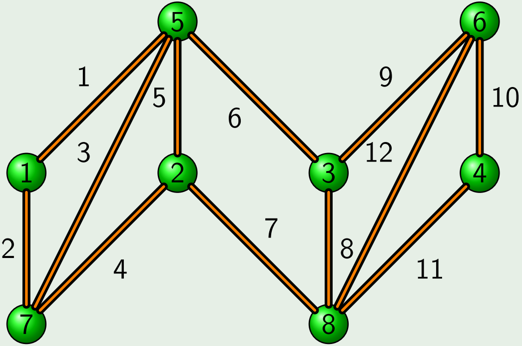
Eksempel

Vi skal knytte to oppgaver til følgende vektede graf:

Grafer og trær

Eksempel

Vi skal knytte to oppgaver til følgende vektede graf:



Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Ved å bruke Prims algoritme, finn det minimale utspennende treet i den vektede grafen på forrige side.

Grafer og trær

Eksempel

a) Ved å bruke Prims algoritme, finn det minimale utspennende treet i den vektede grafen på forrige side.

Forklar hvor du begynner, og i hvilken rekkefølge du legger kanter til treet.

Grafer og trær

Eksempel

a) Ved å bruke Prims algoritme, finn det minimale utspennende treet i den vektede grafen på forrige side.

   Forklar hvor du begynner, og i hvilken rekkefølge du legger kanter til treet.

b) Finn avstanden mellom node 7 og node 6 i grafen.

Grafer og trær

Eksempel

a) Ved å bruke Prims algoritme, finn det minimale utspennende treet i den vektede grafen på forrige side.

   Forklar hvor du begynner, og i hvilken rekkefølge du legger kanter til treet.

b) Finn avstanden mellom node 7 og node 6 i grafen.

c) Bruk Dijkstras algoritme til å finne treet som gir de korteste veiene fra alle noder til node 6

Grafer og trær

Eksempel

a) Ved å bruke Prims algoritme, finn det minimale utspennende treet i den vektede grafen på forrige side.

   Forklar hvor du begynner, og i hvilken rekkefølge du legger kanter til treet.

b) Finn avstanden mellom node 7 og node 6 i grafen.

c) Bruk Dijkstras algoritme til å finne treet som gir de korteste veiene fra alle noder til node 6

   Forklar i hvilken rekkefølge du vil legge kanter til treet.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

Anta at vi utvider den vektede grafen fra side 10 med en kant fra node 5 til node 6 med vekt 7,5 og en kant fra node 7 til node 8 med vekt 5,5.

Grafer og trær

Eksempel

Anta at vi utvider den vektede grafen fra side 10 med en kant fra node 5 til node 6 med vekt 7,5 og en kant fra node 7 til node 8 med vekt 5,5.

a) Vil en eller begge av disse kantene inngå i det minimale utspennende treet i den nye grafen?

Grafer og trær

Eksempel

Anta at vi utvider den vektede grafen fra side 10 med en kant fra node 5 til node 6 med vekt 7,5 og en kant fra node 7 til node 8 med vekt 5,5.

a) Vil en eller begge av disse kantene inngå i det minimale utspennende treet i den nye grafen?

b) Har vi gjort det enklere, vanskeligere eller like enkelt å finne en Eulersti?

Grafer og trær

Eksempel

Anta at vi utvider den vektede grafen fra side 10 med en kant fra node 5 til node 6 med vekt 7,5 og en kant fra node 7 til node 8 med vekt 5,5.

a) Vil en eller begge av disse kantene inngå i det minimale utspennende treet i den nye grafen?

b) Har vi gjort det enklere, vanskeligere eller like enkelt å finne en Eulersti?

c) Hva er den maksimale vekten av en sti som ikke benytter samme kant to ganger i de to tilfellene?

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

a) Tegn syntakstreet til følgende utsagnslogiske uttrykk:

Grafer og trær

Eksempel

a) Tegn syntakstreet til følgende utsagnslogiske uttrykk:

$$(((\neg p \vee q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg q \vee r)$$

Grafer og trær

Eksempel

a) Tegn syntakstreet til følgende utsagnslogiske uttrykk:

$$(((\neg p \vee q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg q \vee r)$$

b) Skriv dette uttrykket med polsk notasjon.

Grafer og trær

Eksempel

a) Tegn syntakstreet til følgende utsagnslogiske uttrykk:

$$(((\neg p \vee q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg q \vee r)$$

b) Skriv dette uttrykket med polsk notasjon.

c) Vis hvordan du kan bruke trerekursjon til å omforme syntakstreet til et uttrykk A på svak normalform til syntakstreet til den svake normalformen til $\neg A$.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon.

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon. Finn ut hvilken term det er og skriv den med vanlig infiks notasjon:

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon. Finn ut hvilken term det er og skriv den med vanlig infiks notasjon:

1. $+ \times 0 - 1 \times \times + 111$

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon. Finn ut hvilken term det er og skriv den med vanlig infiks notasjon:

1. $+ \times 0 - 1 \times \times + 111$
2. $+ \times 0 - 1 \times \times + 1110$

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon. Finn ut hvilken term det er og skriv den med vanlig infiks notasjon:

1. $+ \times 0 - 1 \times \times + 111$
2. $+ \times 0 - 1 \times \times + 1110$
3. $+ \times 0 - 1 \times \times + 1110 - 1$

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med språket for enkle termer over $\mathbb{J}$ som består av konstantene 1, 0 og -1 og hvor vi bruker funksjonene $\times$ og $+$.

a) Ett av de tre ordene under er en term hvor vi har brukt polsk notasjon. Finn ut hvilken term det er og skriv den med vanlig infiks notasjon:

1. $+ \times 0 - 1 \times \times + 111$
2. $+ \times 0 - 1 \times \times + 1110$
3. $+ \times 0 - 1 \times \times + 1110 - 1$

b) Tegn forsøk på syntakstrær for de tre ordene, og foklar hvordan forsøkene avslører hvilke ord som ikke er akseptable.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

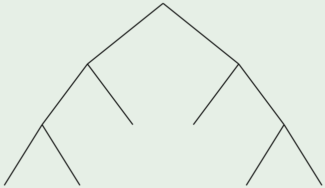
Vi arbeider med termer hvor vi bruker konstantene 0 og 1 og funksjonene $+$ og $\times$.

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med termer hvor vi bruker konstantene 0 og 1 og funksjonene $+$ og $\times$.

Et syntakstre har formen

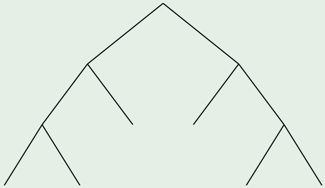


Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med termer hvor vi bruker konstantene 0 og 1 og funksjonene $+$ og $\times$.

Et syntakstre har formen



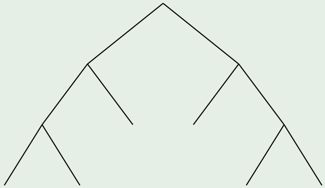
a) Hvor mange forskjellige termer kan dette være syntakstreet til?

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med termer hvor vi bruker konstantene 0 og 1 og funksjonene $+$ og $\times$.

Et syntakstre har formen



a) Hvor mange forskjellige termer kan dette være syntakstreet til?

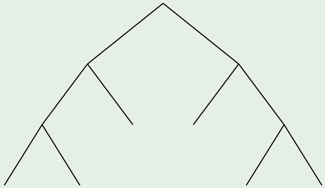
b) Sett merkelapper på treet slik at dette blir et ekte syntakstre og finn den tilsvarende termen på infiks og omvendt polsk form.

Grafer og trær

Eksempel

Vi arbeider med termer hvor vi bruker konstantene 0 og 1 og funksjonene $+$ og $\times$.

Et syntakstre har formen



a) Hvor mange forskjellige termer kan dette være syntakstreet til?

b) Sett merkelapper på treet slik at dette blir et ekte syntakstre og finn den tilsvarende termen på infiks og omvendt polsk form.

c) Vis hvordan hver node kan markeres av en bit-sekvens (en $0-1$ - sekvens.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

- Undersøk om følgende to termer

Grafer og trær

Eksempel

- Undersøk om følgende to termer

$$t_1 = (x \times (0 + y)) \times ((1 + 1) \times z)$$

Grafer og trær

Eksempel

- Undersøk om følgende to termer

$$t_1 = (x \times (0 + y)) \times ((1 + 1) \times z)$$

og

$$t_2 = ((y + 0) \times (0 + 1)) \times ((y + y) \times (0 + 0))$$

Eksempel

- Undersøk om følgende to termer

$$t_1 = (x \times (0 + y)) \times ((1 + 1) \times z)$$

og

$$t_2 = ((y + 0) \times (0 + 1)) \times ((y + y) \times (0 + 0))$$

lar seg unifisere, det vil si, om vi kan finne termer for x, y og z slik at t_1 og t_2 blir like.

Grafer og trær

Eksempel

Grafer og trær

Eksempel

Kan vi finne utsagnslogiske uttrykk A, B og C slik at følgende utsagn blir like?

Grafer og trær

Eksempel

Kan vi finne utsagnslogiske uttrykk A, B og C slik at følgende utsagn blir like?

- $$(p \wedge q) \vee (A \wedge r) \vee (p \wedge r) \vee (A \wedge q)$$

Grafer og trær

Eksempel

Kan vi finne utsagnslogiske uttrykk A, B og C slik at følgende utsagn blir like?

- $$(p \wedge q) \vee (A \wedge r) \vee (p \wedge r) \vee (A \wedge q)$$
- $$((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge C) \vee (p \wedge C) \vee B)$$