MAT1030 – Diskret matematikk

Forelesning 6: Logikk

Dag Normann

Matematisk Institutt, Universitetet i Oslo

30. januar 2008

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Mandag 28/1 innførte vi bindeordene (konnektivene) $\wedge$ for **og**, $\vee$ for **eller** og $\neg$ for **ikke**.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Mandag 28/1 innførte vi bindeordene (konnektivene) $\wedge$ for **og**, $\vee$ for **eller** og $\neg$ for **ikke**.

Vi så hvordan vi kunne definere disse tre konnektivene ved hjelp av sannhetsverditabeller.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Mandag 28/1 innførte vi bindeordene (konnektivene) $\wedge$ for **og**, $\vee$ for **eller** og $\neg$ for **ikke**.

Vi så hvordan vi kunne definere disse tre konnektivene ved hjelp av sannhetsverditabeller.

Vi drøftet litt om hvordan man bør bruke parenteser.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Mandag 28/1 innførte vi bindeordene (konnektivene) $\wedge$ for **og**, $\vee$ for **eller** og $\neg$ for **ikke**.

Vi så hvordan vi kunne definere disse tre konnektivene ved hjelp av sannhetsverditabeller.

Vi drøftet litt om hvordan man bør bruke parenteser.

Rekkevidden til $\neg$ er det neste fulle utsagnslogiske uttrykket, mens rekkevidden til $\wedge$ og $\vee$ vil "gå forbi" forekomster av $\neg$.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Vi så på noen eksempler på hvordan man kan utarbeide en sannhetsverditabell for et sammensatt uttrykk.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Vi så på noen eksempler på hvordan man kan utarbeide en sannhetsverditabell for et sammensatt uttrykk.

Vi var midt i et eksempel, som vi tar opp igjen her, da tiden var ute.

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T						
T						
T						
T						

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T						
T						
T						
T						
F						
F						
F						
F						

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T					
T	T					
T						
T						
F						
F						
F						
F						

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T					
T	T					
T	F					
T	F					
F						
F						
F						
F						

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T					
T	T					
T	F					
T	F					
F	T					
F	T					
F						
F						

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T					
T	T					
T	F					
T	F					
F	T					
F	T					
F	F					
F	F					

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F					
T	F					
F	T					
F	T					
F	F					
F	F					

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T					
F	T					
F	F					
F	F					

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F					
F	F					

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T				
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F				
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T				
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F				
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T				
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F				
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T				
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F				

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F			
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F			
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F			
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F			
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T			
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T			
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T			
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T			

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T		
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T		
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F		
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F		
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F		
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F		
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F		
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F		

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \land q) \lor (\neg p \land r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \land q$	$\neg p \land r$	$(p \land q) \lor (\neg p \land r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	

Sammensatte utsagn, sannhetsverditabeller

Eksempel $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r))$

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$
T	T	T	F	T	F	T
T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.

Utsagnet $x < 3 \vee \neg(x < 5)$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.

Utsagnet $x < 3 \vee \neg(x < 5)$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.

Er det mulig å definere et utsagnslogisk bindeord $\rightarrow$ slik at

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.

Utsagnet $x < 3 \vee \neg(x < 5)$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.

Er det mulig å definere et utsagnslogisk bindeord $\rightarrow$ slik at

- Hvis p og q er utsagn, så vil $p \rightarrow q$ være et utsagn slik at sannhetsverdien til $p \rightarrow q$ avhenger av sannhetsverdiene til p og til q.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x < 3$ så er $x < 5$.

Man skal ikke kunne mye matematikk for å mene at dette må være riktig.

Utsagnet $x < 3 \vee \neg(x < 5)$ vil anta forskjellige sannhetsverdier avhengig av hva x er.

Er det mulig å definere et utsagnslogisk bindeord $\rightarrow$ slik at

- Hvis p og q er utsagn, så vil $p \rightarrow q$ være et utsagn slik at sannhetsverdien til $p \rightarrow q$ avhenger av sannhetsverdiene til p og til q.
- Når x varierer, skal alltid $x < 3 \rightarrow x < 5$ være sant?

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel (Fortsatt)

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel (Fortsatt)

La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel (Fortsatt)

La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.

Hvis $x = 2$ vil både $p(x)$ og $q(x)$ få verdien T, så $p \to q$ bør være sant når både p og q er sanne.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel (Fortsatt)

La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.

Hvis $x = 2$ vil både $p(x)$ og $q(x)$ få verdien T, så $p \rightarrow q$ bør være sant når både p og q er sanne.

Hvis $x = 4$ vil $p(x)$ få verdien F, mens $q(x)$ får verdien T. Derfor bør $p \rightarrow q$ bli sann hvis p er usann mens q er sann.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel (Fortsatt)

La $p(x)$ stå for $x < 3$ og la $q(x)$ stå for $x < 5$.

Hvis $x = 2$ vil både $p(x)$ og $q(x)$ få verdien T, så $p \rightarrow q$ bør være sant når både p og q er sanne.

Hvis $x = 4$ vil $p(x)$ få verdien F, mens $q(x)$ får verdien T. Derfor bør $p \rightarrow q$ bli sann hvis p er usann mens q er sann.

Hvis $x = 6$ blir både $p(x)$ og $q(x)$ usanne, så $p \rightarrow q$ bør bli sann også når både p og q er usanne.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

Hvorfor?

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

Hvorfor?

Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

Hvorfor?

Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$

Et moteksempel er et eksempel på at en ytring ikke alltid er riktig.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

Hvorfor?

Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$

Et moteksempel er et eksempel på at en ytring ikke alltid er riktig.

Et moteksempel til et utsagn “Hvis p så q” vil alltid være et tilfelle hvor p er sann, mens q er usann.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

Hvis $x^2 > 0$ så er $x > 0$.

Mange vil protestere på dette!

Hvorfor?

Fordi det finnes moteksempler, eksempelvis $x = -1$

Et moteksempel er et eksempel på at en ytring ikke alltid er riktig.

Et moteksempel til et utsagn “Hvis p så q” vil alltid være et tilfelle hvor p er sann, mens q er usann.

Det vil derfor være naturlig å la $p \rightarrow q$ være usann når p er sann og q er usann.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er $p \longrightarrow q$ også et utsagn.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er $p \longrightarrow q$ også et utsagn.
- $p \longrightarrow q$ blir sann hvis q er sann eller hvis p er usann.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er $p \longrightarrow q$ også et utsagn.
- $p \longrightarrow q$ blir sann hvis q er sann eller hvis p er usann.
- Hvis p er sann og q er usann, lar vi $p \longrightarrow q$ bli usann.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er to utsagn, er $p \longrightarrow q$ også et utsagn.
- $p \longrightarrow q$ blir sann hvis q er sann eller hvis p er usann.
- Hvis p er sann og q er usann, lar vi $p \longrightarrow q$ bli usann.
- Vi vil lese “hvis p så q”.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Vi kan definere $\rightarrow$ ved hjelp av følgende sannhetsverditabell.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Vi kan definere $\rightarrow$ ved hjelp av følgende sannhetsverditabell.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

> *hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.*

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

> *hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.*

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

$$\textit{Udgangspunkt} \rightarrow \textit{Resultat}$$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

> *hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.*

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

$$\textit{Udgangspunkt} \rightarrow \textit{Resultat}$$

bestemmes av sannhetsverdien til utgangspunktet og til resultatet,

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

De som har problemer med at vi her sier at det er sant at noe usant medfører noe sant (eller noe usant) får hente støtte i det kjente sitatet fra Ibsen

> *hvor Udgangspunktet er galest, blir tidt Resultatet orginalest.*

Ibsen fanger her inn essensen av vår definisjon av hvordan sannhetsverdien til

$$Udgangspunkt \rightarrow Resultat$$

bestemmes av sannhetsverdien til utgangspunktet og til resultatet, og når utgangspunktet er noe som ikke er sant kan resultatet bli hva som helst.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng.
Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng.
Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.

Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med $\rightarrow$.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng. Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.

Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med $\rightarrow$.

Dette er uheldig, fordi det lett fører til en sammenblanding av symbolene $\rightarrow$ og $\Rightarrow$.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng. Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.

Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med $\rightarrow$.

Dette er uheldig, fordi det lett fører til en sammenblanding av symbolene $\rightarrow$ og $\Rightarrow$.

$x < 5 \Rightarrow x < 3$ er regelrett feil, mens $x < 5 \rightarrow x < 3$ er sant for noen verdier av x og usant for andre.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Det er ikke så naturlig å bruke $\rightarrow$ i programmeringssammenheng. Derfor gir vi ingen eksempler hvor $\rightarrow$ brukes i kontrollstrukturer.

Læreboka bruker ordet *implies* i forbindelse med $\rightarrow$.

Dette er uheldig, fordi det lett fører til en sammenblanding av symbolene $\rightarrow$ og $\Rightarrow$.

$x < 5 \Rightarrow x < 3$ er regelrett feil, mens $x < 5 \rightarrow x < 3$ er sant for noen verdier av x og usant for andre.

Dette ble utdypet mere på forelesningen.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Oppgave

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Oppgave

a) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Oppgave

a) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \rightarrow p$$

b) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$$

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Oppgave

a) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \to q) \to p$$

b) Finn sannhetsverditabellen til

$$(p \to q) \vee (q \to p)$$

c) Hva ser du i kolonnen lengst til høyre?

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Når vi bruker “hvis-så” i dagligtale, kan vi få noe meningsløst ut av det.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Når vi bruker “hvis-så” i dagligtale, kan vi få noe meningsløst ut av det.

I de eksemplene som følger kan vi diskutere om tolkningen som logikken forteller oss er riktig stemmer overens med den tolkningen vi vil legge i ytringen som vanlig kommuniserende mennesker:

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, ville jorda vært overbefolket av løver.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, ville jorda vært overbefolket av løver.
- Hvis ulven spiser Rødhette, vil det bli en Grimm historie.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, ville jorda vært overbefolket av løver.
- Hvis ulven spiser Rødhette, vil det bli en Grimm historie.
- Du får gå på kino hvis du vasker opp etter maten.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

- Hvis Noah hadde lært dyrene å svømme, ville jorda vært overbefolket av løver.
- Hvis ulven spiser Rødhette, vil det bli en Grimm historie.
- Du får gå på kino hvis du vasker opp etter maten.
- Hvis dere avholder reelle demokratisike valg, vil vi gi støtte til oppbyggingen av infrastrukturen.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

I det nest siste eksemplet gis det ikke rom for å få gå på kino hvis oppvasken ikke taes og i det siste eksemplet er tilbudet om økonomisk støtte helt klart knyttet til kravet om demoktati.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

I det nest siste eksemplet gis det ikke rom for å få gå på kino hvis oppvasken ikke taes og i det siste eksemplet er tilbudet om økonomisk støtte helt klart knyttet til kravet om demoktati.

Oppvask vil være både en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for kinobesøk.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

I det nest siste eksemplet gis det ikke rom for å få gå på kino hvis oppvasken ikke taes og i det siste eksemplet er tilbudet om økonomisk støtte helt klart knyttet til kravet om demoktati.

Oppvask vil være både en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for kinobesøk.

Vi innfører et siste konnektiv, $\leftrightarrow$ som skal fange opp hvis og bare hvis i samme forstand som $\rightarrow$ fanger opp hvis - så-.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Definisjon

- Hvis p og q er utsagn, er $p \leftrightarrow q$ et utsagn.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er utsagn, er $p \leftrightarrow q$ et utsagn.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når både p og q er sanne, og når både p pg q er usanne.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Definisjon

- Hvis p og q er utsagn, er $p \leftrightarrow q$ et utsagn.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når både p og q er sanne, og når både p pg q er usanne.
- $p \leftrightarrow q$ er sant når p og q har den samme sannhetsverdien.

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Vi kan selvfølgelig også definere $\leftrightarrow$ ved en sannhetsverditabell:

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Vi kan selvfølgelig også definere $\leftrightarrow$ ved en sannhetsverditabell:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

får vi den samme søylen lengst til høyre.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Legg merke til at om vi skriver ut sannhetsverditabellene for

- $p \leftrightarrow q$
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

får vi den samme søylen lengst til høyre.

Det er en passende treningsoppgave å skrive ut de to siste tabellene.

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel $(p \longrightarrow (\neg p \longrightarrow q))$

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel $(p \longrightarrow (\neg p \longrightarrow q))$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel $(p \longrightarrow (\neg p \longrightarrow q))$

p	q	$\neg p$	$\neg p \longrightarrow q$	$p \longrightarrow (\neg p \longrightarrow q)$

"Hvis-så" og "hvis og bare hvis"

Eksempel $(p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$

p	q	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
T	T	F	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	T

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

De to neste eksemplene blir bare gjennomgått på tavla:

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

De to neste eksemplene blir bare gjennomgått på tavla:

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

“Hvis-så” og “hvis og bare hvis”

Eksempel

De to neste eksemplene blir bare gjennomgått på tavla:

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

“En digresjon”

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)
- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)
- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
- Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.

“En digresjon”

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)

- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
- Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.

  En slik definisjon kaller vi en rekursiv eller induktiv definisjon.

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)
- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
- Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.

  En slik definisjon kaller vi en rekursiv eller induktiv definisjon.

  Når vi gir en slik definisjon, begrenser vi bruken av ordet utsagn fra noe vagt, slik vi gjorde det innledningsvis, til noe matematisk presist.

“En digresjon”

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)
- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
- Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.

  En slik definisjon kaller vi en rekursiv eller induktiv definisjon.

  Når vi gir en slik definisjon, begrenser vi bruken av ordet utsagn fra noe vagt, slik vi gjorde det innledningsvis, til noe matematisk presist.

  Vi har en klar parallell i definisjonen av visse programmeringsspråk.

"En digresjon"

Hvis vi ønsker å være helt formelle, kan vi definere formelle utsagnslogiske uttrykk på følgende måte, hvor vi skiller mellom variable for grunnutsagn og sammensatte utsagn:

- Utsagnskonstatene T og F er utsagn.

  (Som logikere burde vi være mer forsiktige her, men vi skal ikke skille mellom en konstant og dens verdi i dette kurset.)

- Alle utsagnsvariable $p_1, \ldots, p_n$ er utsagn.
- Hvis p og q er utsagn, er $\neg p$, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ og $(p \leftrightarrow q)$ også utsagn.

  En slik definisjon kaller vi en rekursiv eller induktiv definisjon.

  Når vi gir en slik definisjon, begrenser vi bruken av ordet utsagn fra noe vagt, slik vi gjorde det innledningsvis, til noe matematisk presist.

  Vi har en klar parallell i definisjonen av visse programmeringsspråk.

  Vi skal komme tilbake til en mer systematisk drøfting av rekursive definisjoner senere i semesteret.

Oppbygging av utsagn

Den induktive oppbyggingen av utsagn forteller oss at vi har grunnutsagn og sammensatte utsagn, men også at noen utsagn er mer sammensatte enn andre. Når vi kommer til kapitlene om grafer og trær, vil vi se at et sammensatt utsagn kan betraktes som en trestruktur, hvor det gitte utsagnet ligger ved roten, og treet forgrener seg gjennom stadig mindre sammensatte delutsagn, helt til vi finner utsagnsvariablene ved bladene.

Oppbygging av utsagn

Den induktive oppbyggingen av utsagn forteller oss at vi har grunnutsagn og sammensatte utsagn, men også at noen utsagn er mer sammensatte enn andre. Når vi kommer til kapitlene om grafer og trær, vil vi se at et sammensatt utsagn kan betraktes som en trestruktur, hvor det gitte utsagnet ligger ved roten, og treet forgrener seg gjennom stadig mindre sammensatte delutsagn, helt til vi finner utsagnsvariablene ved bladene.

Det første bindeordet vi kommer til når vi skal løse opp et utsagn i delutsagn kalles hovedkonnektivet eller, analogt med i boka, prinsipalkonnektivet.

Oppbygging av utsagn

Den induktive oppbyggingen av utsagn forteller oss at vi har grunnutsagn og sammensatte utsagn, men også at noen utsagn er mer sammensatte enn andre. Når vi kommer til kapitlene om grafer og trær, vil vi se at et sammensatt utsagn kan betraktes som en trestruktur, hvor det gitte utsagnet ligger ved roten, og treet forgrener seg gjennom stadig mindre sammensatte delutsagn, helt til vi finner utsagnsvariablene ved bladene.

Det første bindeordet vi kommer til når vi skal løse opp et utsagn i delutsagn kalles hovedkonnektivet eller, analogt med i boka, prinsipalkonnektivet.

Dette illustreres på tavlen.

Mer om parenteser

Eksempel

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$
- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \wedge q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$$
- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\wedge$ og $\vee$ skiller mer enn $\neg$.

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$
- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$
- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

$$(((p \land q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r)))$$

Mer om parenteser

Eksempel

- $$(p \land q \to r) \to (p \to r) \lor (q \to r)$$
- Her mangler det noen parenteser, og for å kunne sette opp sannhetsverditabellen, må vi vite hvilke parenteser som mangler, eller, som er underforstått.
- Vi har tidligere sagt at $\land$ og $\lor$ skiller mer enn $\neg$.
- Vi skal også la $\to$ og $\leftrightarrow$ skille mer enn $\land$ og $\lor$.
- Det betyr at utsagnet over egentlig skal være

  $$(((p \land q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r)))$$

  noe som ikke akkurat er lettere å lese.

Fortsettelse av eksemplet

Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen

Fortsettelse av eksemplet

Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.

Fortsettelse av eksemplet

Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.

Vi oppdager at høyre søyle vil inneholde T i alle linjer.

Fortsettelse av eksemplet

Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.

Vi oppdager at høyre søyle vil inneholde T i alle linjer.

Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.

Fortsettelse av eksemplet

Vi skriver ut trestrukturen til dette sammensatte utsagnet på tavlen og fortsetter med å skrive ut sannhetsverditabellen.

Vi oppdager at høyre søyle vil inneholde T i alle linjer.

Det betyr at utsagnet er sant uansett hvilke grunnutsagn vi setter inn for p, q og r.

Da må $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ være en logisk konsekvens av $p \wedge q \rightarrow r$.

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

Fortsettelse av eksemplet

- La p stå for "Jeg betaler semesteravgift".
- La q stå for "Jeg får godkjent oblig'ene".
- La r stå for "Jeg kan gå opp til eksamen".
- Da er
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften kan jeg gå opp til eksamen eller hvis jeg får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

  en logisk konsekvens av
  - Hvis jeg betaler semesteravgiften og får godkjent oblig'ene kan jeg gå opp til eksamen.

  Er det noe galt her, og i så fall hva?:

Mer om parenteser

Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \wedge q \wedge r$$

og

$$p \vee q \vee r?$$

Mer om parenteser

Hvordan skal vi forstå utsagn som

$$p \wedge q \wedge r$$

og

$$p \vee q \vee r?$$

I slike tilfeller vil vi få den samme høyresøylen i sannhetsverditabellen uansett hvordan vi setter parentesene, så vi kan like godt la det være.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.

A er en tautologi hvis A får verdien T for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare T i høyre søyle.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.

A er en tautologi hvis A får verdien T for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare T i høyre søyle.

Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Definisjon

La A være et sammensatt utsagn i utsagnsvariablene $p_1, \ldots, p_n$.

A er en tautologi hvis A får verdien T for alle fordelinger av sannhetsverdier på $p_1, \ldots, p_n$, det vil si hvis sannhetsverditabellen til A har bare T i høyre søyle.

Vi kunne brukt ordene selvoppfyllende eller selvforklarende på norsk, men holder oss til det internasjonalt brukte tautologi.

Hvis sannhetsverdien til A derimot alltid blir F, kaller vi A en kontradiksjon eller en selvmotsigelse.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.

Tautologier og kontradiksjoner

Eksempel

- $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ er en tautologi.
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ er en tautologi
- $p \wedge \neg p$ er en kontradiksjon
- $(p \leftrightarrow q) \wedge p \wedge \neg q$ er en kontradiksjon.
- $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ er en tautologi.

Logisk ekvivalens

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

Logisk ekvivalens

Eksempel ($\neg p \wedge \neg q$)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Eksempel ($\neg(p \vee q)$)

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

Vi ser at høyresøylene er identiske.

Logisk ekvivalens

Definisjon

Logisk ekvivalens

Definisjon

La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.

Logisk ekvivalens

Definisjon

La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.

Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.

Logisk ekvivalens

Definisjon

La A og B være to utsagnslogiske uttrykk.

Vi sier at A og B er logisk ekvivalente hvis A og B har samme sannhetsverdi uansett hvilke verdier vi gir til utsagnsvariablene.

Vi skriver

$$A \equiv B$$

når A og B er logisk ekvivalente.

Logisk ekvivalens

Eksempel

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \land \neg q \equiv \neg(p \lor q)$
- $\neg p \lor \neg q \equiv \neg(p \land q)$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Logisk ekvivalens

Eksempel

- $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$
- $\neg p \vee \neg q \equiv \neg(p \wedge q)$
- $\neg\neg p \equiv p$
- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \mathrm{T}$

Logisk ekvivalens

Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.

Logisk ekvivalens

Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt “laws of logic”.

Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.

Logisk ekvivalens

Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt "laws of logic".

Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.

Det er et faktum vi ikke skal bevise (nå?) at vi kan regne oss frem til T fra enhver tautologi.

Logisk ekvivalens

Tabell 4.12 på side 55 i læreboka lister opp en rekke regneregler for utsagnslogikk, kalt "laws of logic".

Poenget er at man kan regne på et uttrykk ved å bruke disse reglene på deluttrykk, for derved å prøve å forenkle det.

Det er et faktum vi ikke skal bevise (nå?) at vi kan regne oss frem til T fra enhver tautologi.

At disse lovene virkelig kan brukes som regneregler, bør bevises:

Logisk ekvivalens

Teorem

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Da er $A \equiv D$.

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Da er $A \equiv D$.

Bevis

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Da er $A \equiv D$.

Bevis

I sannhetsverditabellen for A har vi en søyle for B, og det er bare verdiene i denne søylen vi bruker videre.

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Da er $A \equiv D$.

Bevis

I sannhetsverditabellen for A har vi en søyle for B, og det er bare verdiene i denne søylen vi bruker videre.

Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en søyle for C i stedenfor.

Logisk ekvivalens

Teorem

La A være et sammensatt utsagn, og la B være et delutsagn av A.

La C være et annet utsagn slik at $B \equiv C$ og la D komme fra A ved at vi erstatter en eller flere forekomster av B med C.

Da er $A \equiv D$.

Bevis

I sannhetsverditabellen for A har vi en søyle for B, og det er bare verdiene i denne søylen vi bruker videre.

Vi ville fått samme sluttresultat om vi hadde brukt en søyle for C i stedenfor.

Dette svarer til å sette opp sannhetsverditabellen for D.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

La A og B være sammensatte utsagn.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

La A og B være sammensatte utsagn.

B er en logisk konsekvens av A dersom $A \rightarrow B$ er en tautologi.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

La A og B være sammensatte utsagn.

B er en logisk konsekvens av A dersom $A \rightarrow B$ er en tautologi.

Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

Logisk konsekvens

- Logisk ekvivalens er et viktig begrep.
- Logisk konsekvens er et minst like viktig begrep:

Definisjon

La A og B være sammensatte utsagn.

B er en logisk konsekvens av A dersom $A \to B$ er en tautologi.

Vi skriver ofte $A \Rightarrow B$ når B er en logisk konsekvens av A.

Merk at uttrykk som $A \equiv B$ og $A \Rightarrow B$ ligger på utsiden av den formelle utsagnslogikken.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathrm{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathrm{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, er A en tautologi.

Strategier

- Det finnes flere metoder eller strategier for å bestemme om et sammensatt utsagn er en tautologi eller ikke.
- Bruk av sannhetsverditabeller er en sikker, men tidkrevende metode.
- Vi skal ikke legge vekt på bruk av regnereglene for logikk her, men hvis man vil bruke den, kan man gjøre det målrettet, ved å eliminere $\leftrightarrow$ og $\rightarrow$, flytte alle forekomster av $\neg$ så langt inn som mulig og så bruke distributive lover og forkortningsregler.
- Hvis A er et sammensatt utsagn, kan vi "løse likningen" $A = \mathrm{F}$ med hensyn på utsagnsvariablene.

  Hvis likningen ikke har løsning, er A en tautologi.
- Hva som er mest hensiktsmessig avhenger av hvordan det sammensatte utsagnet ser ut.